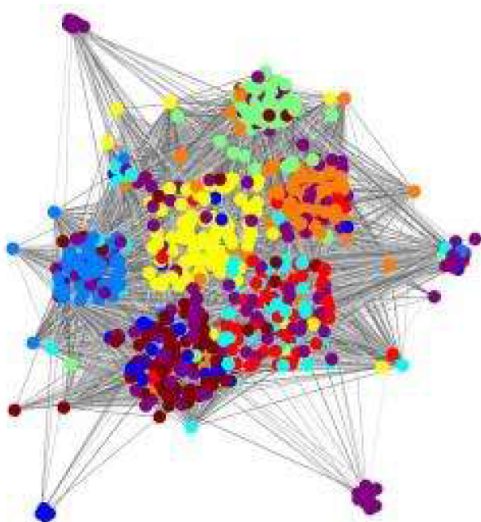


NETWERKEN

Syllabus Vakantiecursus 2016

Amsterdam, 26 en 27 augustus 2016

Eindhoven, 2 en 3 september 2016



NETWERKEN

Syllabus Vakantiecursus 2016

Amsterdam, 26 en 27 augustus 2016

Eindhoven, 2 en 3 september 2016

Programmacommissie

prof. dr. Frits Beukers (UU)

drs. Joke Blom (CWI)

drs. Swier Garst (PWN)

prof. dr. Wil Schilders (PWN, TU/e)

dr. Jeroen Spandaw (TUD)

dr. Marco Swaen (UvA)

dr. Benne de Weger (TU/e)

prof. dr. Jan Wiegerinck (UvA) (voorzitter)

drs. Bart Zevenhek (Barlaeus)

e-mail: vakantiecursus@platformwiskunde.nl

Platform Wiskunde Nederland

Science Park 123, 1098 XG Amsterdam

Telefoon: 020-592 4006

Website: <http://www.platformwiskunde.nl>

Vakantiecursus 2016

De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in HAVO, VWO, HBO en andere belangstellenden is een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, en wordt georganiseerd door het Platform Wiskunde Nederland. De cursus wordt sinds 1946 jaarlijks gegeven op het Centrum Wiskunde en Informatica te Amsterdam en aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Deze cursus wordt mede mogelijk gemaakt door een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), en een bijdrage van 3TU.AMI, het toegepaste wiskunde-instituut van de 3 Nederlandse technische universiteiten. Organisatie vindt plaats in nauwe samenwerking met het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) en de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e).

De presentaties van de sprekers zullen zo veel mogelijk beschikbaar komen op de PWN-website:

http://www.platformwiskunde.nl/onderwijs_vakantiecursus_wiskunde.htm.

Met dank aan

Ondersteuning PWN: Sjoukje Talsma.

Ondersteuning TU/e: Anita Klooster.

Historie

De eerste vakantiecursus wordt in het jaarverslag 1946 van het Mathematisch Centrum als volgt vermeld:

Op 29 en 31 Oct. '46 werd onder auspiciën van het M.C. een druk bezochte en uitstekend geslaagde vacantiecursus gehouden voor wiskundeleeraren in Nederland. Op 29 October stond de wiskunde, op 31 October de didactiek van de wiskunde op de voorgrond. De sprekers waren: Prof.Dr. O. Bottema, "De prismoïde", Dr. A. Heyting, "Punten in het oneindige", Mr. J. v. IJzeren, "Abstracte Meetkunde en haar betekenis voor de Schoolmeetkunde.", Dr. H.D. Kloosterman, "Ontbinding in factoren", Dr. G. Wielenga, "Is wiskunde-onderwijs voor alpha's noodzakelijk?", Dr. J. de Groot, "Het scheppend vermogen van den wiskundige" en Dr. N.L.H. Bunt, "Moeilijkheden van leerlingen bij het beginnend onderwijs in de meetkunde".

Aan het einde van de vacantiecursus werden diverse zaken besproken die het wiskunde-onderwijs in Nederland betroffen. Een Commissie werd ingesteld, die het M.C. over de verder te organiseren vakantiecursussen van advies zou dienen. Hierin namen zitting een vertegenwoordiger van de Inspecteurs van het V.H. en M.O. benevens vertegenwoordigers van de lerarenverenigingen Wimecos en Liwenagel.

Ook werd naar aanleiding van "wensen" die tijdens de cursus naar voren gekomen waren ingesteld: "een colloquium over moderne Algebra, een dispuut over de didactiek van de wiskunde, beiden hoofdzakelijk bedoeld voor de leeraren uit Amsterdam en omgeving, terwijl tevens vanwege het M.C. een cursus over Getallenleer werd toegezegd te geven door de heeren v.d. Corput en Koksma. (Colloquium, dispuut en cursus zijn in 1947 gestart en verheugen zich in blijvende belangstelling).

Docenten

dr. J. Briët

Centrum Wiskunde en Informatica, Science Park 123, 1098 XG Amsterdam

e-mail: jop.briet@cw.i.nl

prof. dr. ir. L.C. van der Gaag

Universiteit Utrecht, Departement Informatica, Postbus 80089, 3508 TB Utrecht

e-mail: l.c.vandergaag@uu.nl

dr. D.C. Gijswijt

Technische Universiteit Delft, Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica, Mekelweg 4, 2628 CD Delft

e-mail: dion.gijswijt@gmail.com

prof. ir. A.M.J. Koonen

Technische Universiteit Eindhoven, Faculteit Electrical Engineering, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven

e-mail: a.m.j.koonen@tue.nl

prof. dr. J.H. van Leeuwen

Technische Universiteit Eindhoven, Faculteit Wiskunde en Informatica, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven e-mail: j.h.v.leeuwen@tue.nl

dr. F. Spijksma

Universiteit Leiden, Mathematisch Instituut, Postbus 9512, 2300 RA Leiden

e-mail: spijksma@math.leidenuniv.nl

Programma

Vrijdag 26 augustus 2016 / 2 september 2016

15.00–15.30		<i>Ontvangst, koffie</i>
15.30–15.35	Wiegerinck	Introductie “Netwerken”
15.35–16.20	Van Leeuwaarden	Kansen, netwerken en data
16.20–16.45		<i>Pauze</i>
16.45–17:30	Koonen	Dynamische optimalisatie van optische telecommunicatienetwerken
17.30–18.30		<i>Diner</i>
18.30–19.15	Spieksma	Storingsgevoeligheid van netwerken
19.15–19.45		<i>Pauze</i>
19.45–20.30		Praktikum 1

Zaterdag 27 augustus 2016 / 3 september 2016

10.00–10.30		<i>Ontvangst, koffie</i>
10.30–11.15	Van der Gaag	Van de predikant Bayes naar Bayesiaanse netwerken
11.15–12.00	Briët	Grafentheorie en communicatie
12.00–13.00		<i>Lunch</i>
13.00–13.45	Gijswijt	Knappe koppelingen
13.45–14.30		Practicum 2
14.30		Afsluiting

Ten geleide

Jan Wiegerinck

Universiteit van Amsterdam

Binnen de programmacommissie is er enige twijfel geweest over het onderwerp *Netwerken*. Is het onderwerp wel aansprekend? Zit er genoeg echte, mooie wiskunde in? Sluit het aan op de onderwijspraktijk? Nu ik daar weer over nadenk, komen Hardy en een anekdote over Landau bij me op.

In zijn essay *A Mathematician's Apology* uit 1940 schrijft de grote wiskundige en pacifist G. H. Hardy dat “echte” wiskunde draait om algemene geldigheid, schoonheid, abstractie en diepzinnigheid, en dat “echte” wiskunde niet nuttig is en ver weg blijft van het maken van vuile handen in de maatschappij en de (oorlogs)industrie. Hij geeft als toegankelijk voorbeelden van “echte” wiskunde het bewijs van het bestaan van oneindig veel priemgetallen, en de irrationaliteit van $\sqrt{2}$. Inderdaad, dat zijn bewijzen die mensen al duizenden jaren geraakt hebben. Hardy heeft weinig waardering voor “nuttige” wiskunde, die in zijn ogen wel vuile handen maakt en wiskundig gezien niet interessant is. Het anekdotisch antwoord van Landau op de vraag: “Wat is nu eigenlijk het nut van de getaltheorie?” sluit hier naadloos bij aan. Het is, naar verluidt: “Je kan erop promoveren!”.

Met de introductie van Topsectoren in het Nederlands wetenschappelijk landschap, het toevoegen van Valorisatie aan het takenpakket van de Universiteiten, en een onderwerp als *Netwerken* in de vakantiecursus, kun je je afvragen wat er van de ideeën van Hardy en Landau is overgebleven in de Nederlandse wiskunde.

Hardy's definitie van “nuttige” wiskunde komt neer op uitgebreide middelbare-schoolwiskunde, denk aan calculus, terwijl de belangrijkste toepassing die hij noemt, ballistiek is; je kunt je goed voorstellen dat hij dat niet bepaald spannend of zelfs acceptabel vond. Hardy had in 1940 geen flauw idee van de manier waarop zijn “echte” wiskunde in minder dan vijftig jaar zou infiltreren in wetenschap, technologie en maatschappij. Dat geldt zeker voor zijn favoriete onderwerp, de getaltheorie. Die

is nu bepalend in de cryptografie en er werken getaltheoretici bij inlichtingendiensten over de hele wereld. De grens tussen zuivere en toegepaste wiskunde is vervaagd en alles wat in Hardy's ogen "echte" wiskunde zo mooi maakte, is nu ook terug te vinden in de wiskunde die niet louter als *art pour l'art* beoefend wordt. We zijn niet armer geworden, maar rijker!

De voordrachten in deze vakantie cursus gaan over mooie, diepzinnige abstracte wiskunde, die algemeen geldig is. Wat de sprekers vertellen behoort zeker ook tot de "nuttige" wiskunde, (en hier en daar informatica en natuurkunde). Johan van Leeuwen geeft een breed perspectief over netwerken in de praktijk en Ton Koonen's voordracht gaat behoorlijk diep in op de problematiek van optische telecommunicatie. Ik hoop dat u in de voordrachten en op het practicum weer vaak het "Aha" gevoel mag ervaren, dat hoort bij het opdoen van nieuwe inzichten. En dan de onderwijspraktijk: Bayesiaanse statistiek (Linda van der Gaag) is –nog– geen VWO onderwerp, maar wordt zo algemeen gebruikt, dat je er als wiskundedoцент wel kennis van moet hebben. Het past goed in een wiskunde D cursus. Floske Spieksma laat het verband zien tussen verkeersnetwerken en elektrische netwerken. De wet van Kirchhoff iets zegt over de stabiliteit van het metronetwerk in Amsterdam! Een mooi uitgangspunt van een profielwerkstuk met Natuurkunde. Jop Briët en Dion Gijswijt verbinden grafentheorie met communicatieproblemen en koppelingsvraagstukken. Grafentheorie is een ideaal onderwerp voor de getalenteerde scholier: Vragen zijn goed begrijpelijk te formuleren maar voor antwoorden moet je (soms heel) slim zijn. De belangrijkste boodschap voor de onderwijspraktijk is echter: ons vak ontwikkelt zich naar alle kanten in de maatschappij, maar behoudt zijn kern, waarin schoonheid, inzicht en zuiver redeneren essentieel zijn.

Inhoudsopgave

1	Kansen, netwerken en data	
	Johan van Leeuwen	1
2	Dynamische optimalisatie van optische telecommunicatienetwerken	
	Ton Koonen	3
3	Storingsgevoeligheid van netwerken	
	Floske Spijksma	41
4	Van de predikant Bayes naar Bayesiaanse netwerken	
	Linda van der Gaag	61
5	Grafentheorie en communicatie	
	Jop Briët	71
6	Knappe koppelingen	
	Dion Gijswijt	89

1 Kansen, netwerken en data

Johan van Leeuwen

Voorwoord

In deze inleidende voordracht zal ik een breed perspectief schetsen over netwerken. Data, mensen, producten, energie en ziekten bewegen over netwerken die zo complex zijn dat niemand ze helemaal begrijpt. Wiskundige modellen kunnen orde scheppen in deze chaos, en wiskunde wordt daarmee steeds belangrijker, op middelbare scholen, binnen universitaire opleidingen, bij bedrijven en in het onderzoek.

Materiaal ter voorbereiding

Als voorbereiding, of achtergrond, voor mijn lezing verwijs ik naar de 5 YouTube videos die ik heb opgenomen voor de Universiteit van Nederland. Dit zijn korte colleges van 15 minuten, gegeven voor een breed publiek. Toen ik deze colleges maakte, in het najaar van 2015, had ik voor ogen dat ze ook geschikt zouden moeten zijn voor middelbare scholieren. Ik weet dat er wiskundedocenten zijn die de colleges in de klas laten zien. Dus wil je de proef op de som nemen, dan zijn de videos hier te vinden:

https://www.youtube.com/watch?v=nwc9NYkDjJI&list=PLZ0df6wQ5o09hQNXycwv0o7pT6W0SZs_L

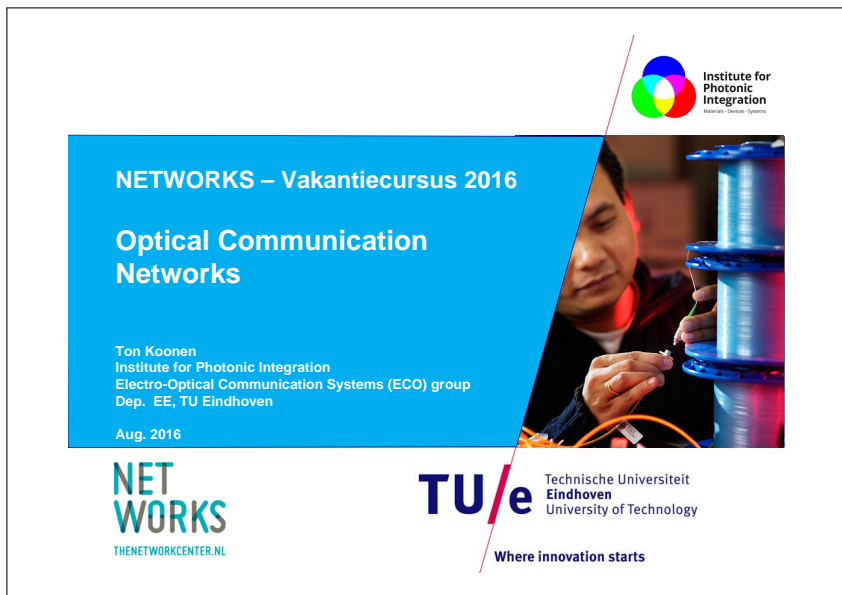
Voor twee van de vijf colleges heb ik inmiddels ook geschreven versies beschikbaar:

<http://www.win.tue.nl/~jleeuwaa/statormini1.pdf>

<http://www.win.tue.nl/~jleeuwaa/statormini2.pdf>

2 Dynamische optimalisatie van optische telecommunicatienetwerken

Ton Koonen



NETWORKS – Vakantiecursus 2016

Optical Communication Networks

Ton Koonen
Institute for Photonic Integration
Electro-Optical Communication Systems (ECO) group
Dep. EE, TU Eindhoven

Aug. 2016

NET WORKS
THE NETWORK CENTER.NL

TU/e Technische Universiteit Eindhoven
University of Technology

Where innovation starts

Institute for Photonic Integration
Photonics - Optics - Systems

Outline

1

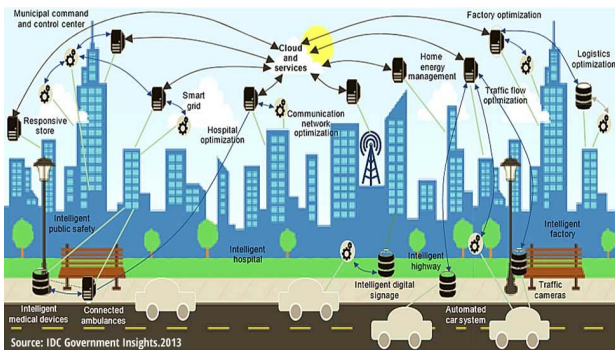
- The booming needs for telecom networks
- Optical communication – the toolbox
 - Optical fibres
 - Optical sources
 - Optical detectors
 - Optical amplifiers
 - Optical wavelength multiplexers
- Point-to-point fibre transmission link
 - Intensity Modulation – Direct Detection
 - Multiwavelength transmission
 - Coherent detection
- Optical networks
 - Network topologies
 - Wavelength routing
 - Wavelength conversion
- Optical metropolitan networks
 - Network routing node
 - Optical buffering
- Fibre-wireless access networks
 - Radio picocells
 - Dynamic capacity allocation
- Concluding remarks

amjk 11-Aug-16

TU/e

The explosive growth of communication

2

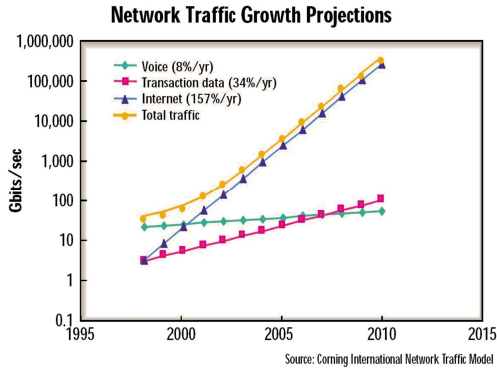


amjk 11-Aug-16

TU/e

... so internet traffic dominates ...

3

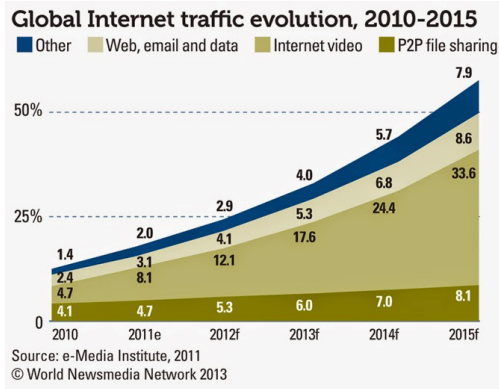


amjk 11-Aug-16

TU/e

... and video is the main demand driver

4

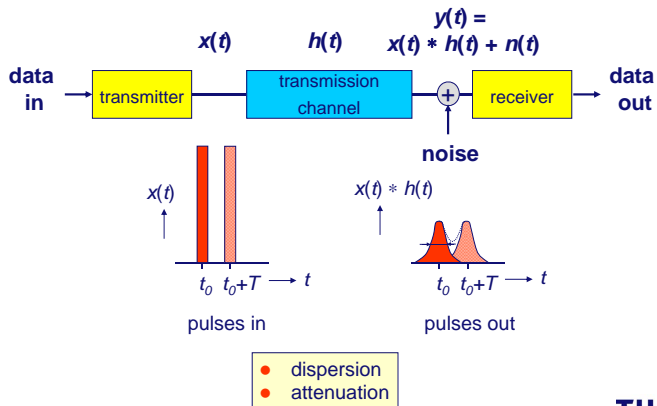


amjk 11-Aug-16

TU/e

Data transmission system

5



amjk 11-Aug-16

TU/e

Outline

6

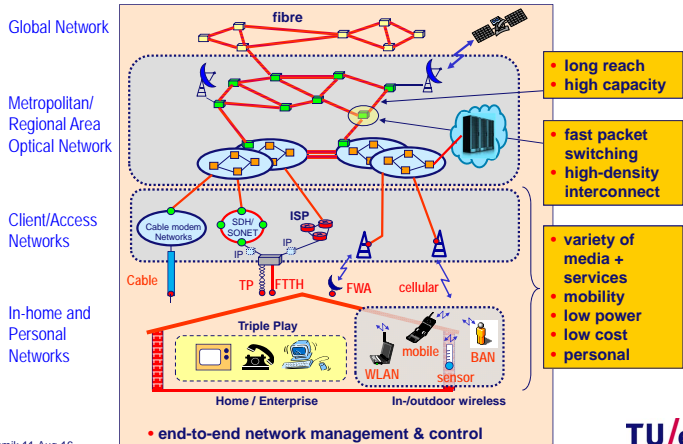
- The booming needs for telecom networks
- Optical communication – the toolbox
 - Optical fibres
 - Optical sources
 - Optical detectors
 - Optical amplifiers
 - Optical wavelength multiplexers
- Point-to-point fibre transmission link
 - Intensity Modulation – Direct Detection
 - Multiwavelength transmission
 - Coherent detection
- Optical networks
 - Network topologies
 - Wavelength routing
 - Wavelength conversion
- Optical metropolitan networks
 - Network routing node
 - Optical buffering
- Fibre-wireless access networks
 - Radio picocells
 - Dynamic capacity allocation
- Concluding remarks

amjk 11-Aug-16

TU/e

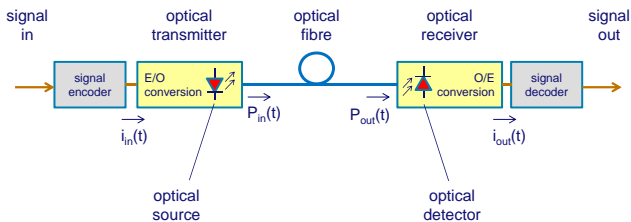
Optical fibre – pillar of our information society

7



Optical fibre transmission system

8



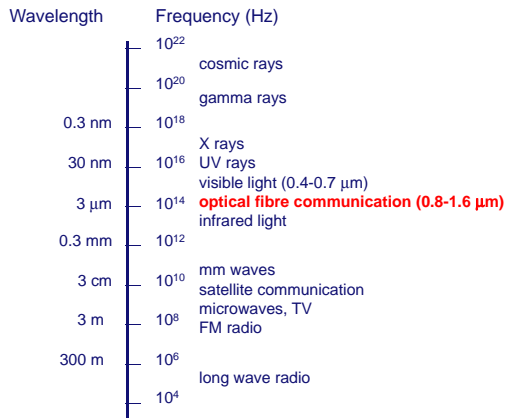
- Optical source: converts input current signal $i_{in}(t)$ into input optical power signal $P_{in}(t)$
- Optical fibre: attenuates and disperses $P_{in}(t)$ (**note**: optical power always ≥ 0)
- Optical detector: converts output optical power signal $P_{out}(t)$ into output current signal $i_{out}(t)$

amjk 11-Aug-16

TU/e

Electromagnetic waves

9

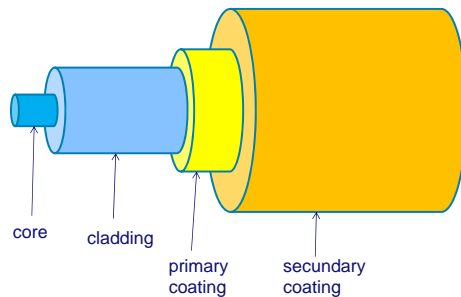


amjk 11-Aug-16

TU/e

Silica optical fibre

10



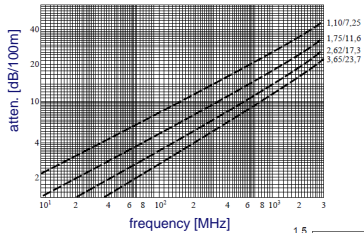
- Core; for guiding the light signal; silica, typ. \varnothing 9 to 62.5 μm
- Cladding: silica, typ. \varnothing 125 μm
- Primary coating: for protection, a polymer typ. \varnothing 250 μm
- Secondary coating: for protection, a polymer typ. \varnothing 0.5 to 1 mm

amjk 11-Aug-16

TU/e

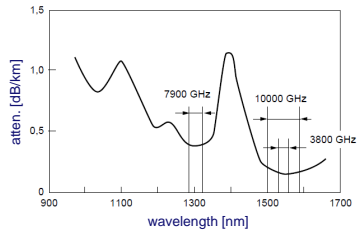
Fibre vs. coaxial cable

11



Attenuation vs. frequency of coaxial cables

Attenuation vs. wavelength of silica single-mode fibre

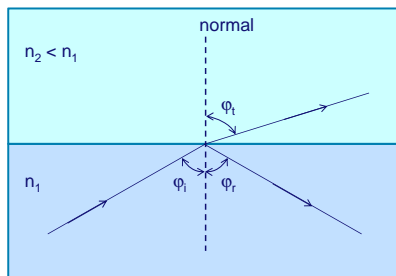


amjk 11-Aug-16

TU/e

Total internal reflection

12



Refraction following Snell's law:

$$n_1 \sin \varphi_i = n_2 \sin \varphi_t$$

critical angle (φ_c for which φ_t becomes $\pi/2$):

$$\varphi_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Reflection:

$$\varphi_r = \varphi_i$$

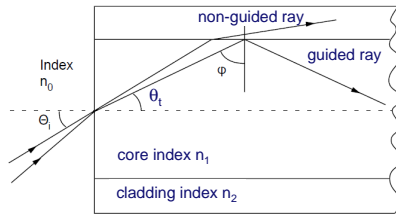
Total internal reflection: if $\varphi_i > \varphi_c$

amjk 11-Aug-16

TU/e

Ray propagation in step-index fibre

13



Guided ray: by total internal reflection, so $\varphi >$ critical angle φ_c

$$\rightarrow n_0 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_t = n_1 \cos \varphi < n_1 \cos \varphi_c$$

$$\cos \varphi_c = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_c} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow n_0 \sin \theta_i < n_0 \sin \theta_{i,\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \triangleq NA \quad \text{numerical aperture}$$

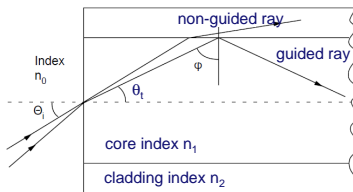
amjk 11-Aug-16

Guided light power $P \propto (a \cdot NA)^2$

TU/e

Modal dispersion in step-index fibre

14



Axial rays (crossing the fibre's axis):

- Fastest ray: $\theta_i = 0$
- Slowest ray: $\theta_i = \theta_{i,\max} = \arcsin(NA/n_0)$

Non-axial rays: have the same propagation time difference

Propagation time difference ΔT for fibre length L :

$$\Delta T = \frac{\Delta L \cdot n_1}{c_0} = \frac{n_1}{c_0} \cdot \left(\frac{L}{\sin \varphi_c} - L \right) = \frac{n_1}{c_0} \cdot L \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) = \frac{L}{c_0} \cdot \frac{n_1^2}{n_2} \cdot \Delta$$

Max. guided data rate B : pulse widening $\Delta T < 1/B$

\rightarrow **Bitrate \times Length product**

$$B \cdot L < \frac{n_2}{n_1^2} \cdot \frac{c_0}{\Delta} = \frac{c_0}{n_1} \left(\frac{1}{\Delta} - 1 \right) = c_0 \left(\frac{2n_1}{NA^2} - \frac{1}{n_1} \right)$$

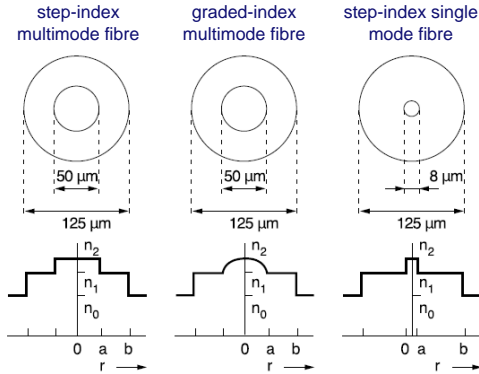
a higher NA leads to a lower $B \times L$ product

amjk 11-Aug-16

TU/e

Refractive index profiles

15



Light guiding in only a single mode when $\lambda > \lambda_{cut-off} = \frac{2\pi a}{2.405} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

amjk 11-Aug-16

TU/e

Graded-index fibre

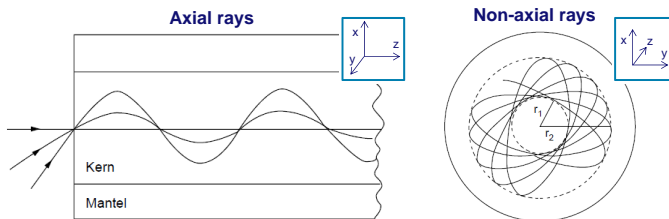
16

Refractive index profile

$$n(r) = n(0) \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^x} \quad \text{if } 0 < r < a$$

$$= n(0) \sqrt{1 - 2\Delta} \quad \text{if } r \geq a$$

Shape parameter x :
 $x=2$ parabolic graded index profile
 $x=\infty$ step-index profile



amjk 11-Aug-16

Non-axial rays are equally fast as axial rays

TU/e

Modes in an optical fibre - EM field analysis

17

- **Maxwell's general wave equation:** $\nabla^2 \bar{E} = \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

- For harmonic time-dependency: $\bar{E} = \bar{E}_a e^{j\omega t}$
- Core and cladding not electrically conductive: so $\sigma=0$

→ EM wave equation for harmonic waves: $\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0$

where wave-number $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0} = \omega \sqrt{\varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

$$= \sqrt{\varepsilon_r} \frac{\omega}{c_0} = \frac{\omega n}{c_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Fibre has **cylindrical structure** → go to cylindrical coordinates r, φ and z .
- According to Maxwell, the E-field components E_r, E_φ and E_z depend on each other and on the H-field components
- Method of separation of variables: $E_z(r, \varphi, z) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z)$

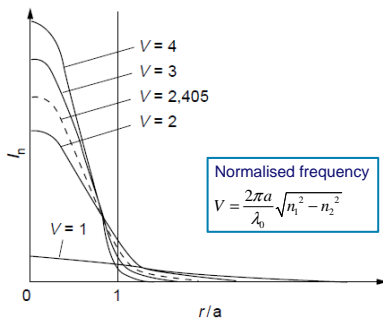
amjk 11-Aug-16

TU/e

Intensity distribution of fundamental mode LP₀₁

18

Intensity distribution of LP₀₁ mode in the fibre's cross-section:



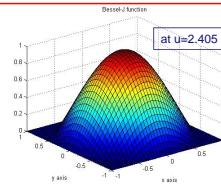
Normalised frequency

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$I_n(r) = \frac{1}{2} E_r H_t$$

$$\sim J_0^2\left(u \cdot \frac{r}{a}\right) \text{ in core}$$

$$\sim K_0^2\left(w \cdot \frac{r}{a}\right) \text{ in cladding}$$



- The field retracts further inside the core when λ decreases (V increases)
- A considerable part of the total power flows through the cladding ($r > a$); at $V=2.405$ this is about 19%.

amjk 11-Aug-16

TU/e

Linearly polarised modes (cont.)

19

The 4 axial LP_{nm} mode fields are:

$$E_z = A_1 J_n\left(\frac{u}{a} r\right) \cos n\varphi$$

$$H_z = \pm A_1 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} J_n\left(\frac{u}{a} r\right) \sin n\varphi$$

$$E_z = B_1 J_n\left(\frac{u}{a} r\right) \sin n\varphi$$

$$H_z = \pm B_1 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} J_n\left(\frac{u}{a} r\right) \cos n\varphi$$

with + for HE modes and – for EH modes.



LP_{01}



LP_{11a}



LP_{11b}



LP_{21a}



LP_{21b}



LP_{02}

fundamental
mode

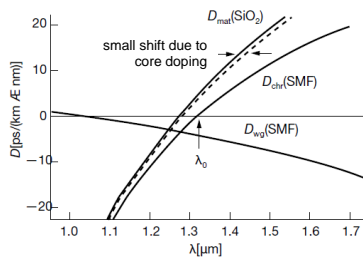
+ 2 orthogonal polarisation states per mode

amjk 11-Aug-16

TU/e

Chromatic dispersion of single-mode (LP_{01}) fibre

20



Chromatic dispersion $D(\lambda)$ consists of waveguide dispersion and material dispersion

At the **zero dispersion wavelength λ_0** , the waveguide dispersion is offset by the material dispersion.

$D(\lambda)$ is expressed in ps/nm·km

Delay time difference Δt between components of a pulse from a source with spectral width $\Delta\lambda$ over fibre length L

$$\Delta t = D(\lambda) \cdot \Delta\lambda \cdot L$$

For standard single-mode fibre (SMF):

- $\lambda_0 = 1310$ nm (typ.)
- at $\lambda = 1550$ nm, $D(\lambda) = -17$ ps/nm·km (typ.)

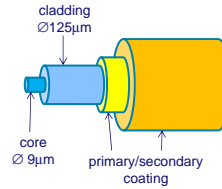
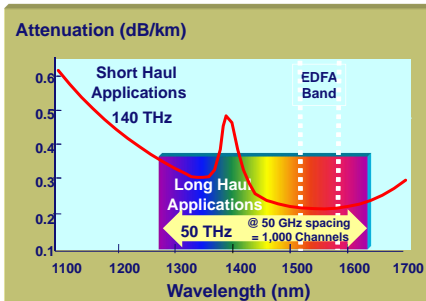
amjk 11-Aug-16

TU/e

Single-mode fibre's enormous bandwidth

21

SMF: very low attenuation & very low dispersion



use **wavelength multiplexing** to increase capacity, and also routing flexibility

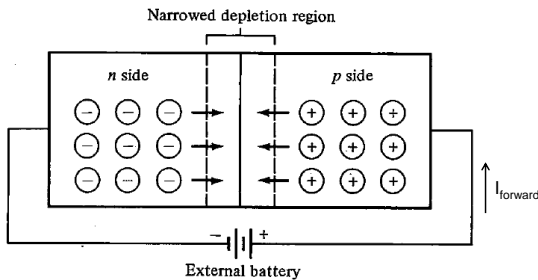
amjk 11-Aug-16

TU/e

Semiconductor p-n junction

22

- Biased in forward direction: majority carriers diffuse across junction
- Increase there the concentration of minority carriers
- Excess carriers recombine with majority carriers, and generate photons

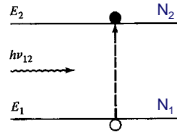


amjk 11-Aug-16

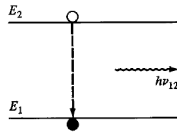
TU/e

Laser action

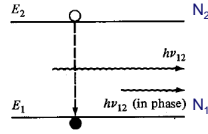
23



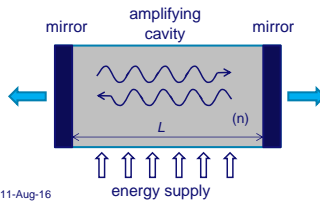
Absorption:
Incident photon brings electron to higher energy level



Spontaneous emission:
Transition of electron to lower energy level generates a photon
Incident photon



Stimulated emission:
Incoming photon stimulates electron transition and thus a new photon (in phase)



amjk 11-Aug-16

Fabry-Perot laser

- Laser operation requires population inversion $N_2 > N_1$
- Total amplification after 1 roundtrip becomes 1 (stationary case)
- Standing waves in the laser cavity (many integer orders m):

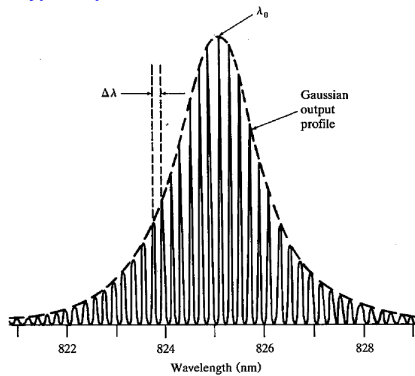
$$m \frac{\lambda_0}{2n} = L \rightarrow \lambda_0 = \frac{2nL}{m}$$

TU/e

Spectrum of FP laser diode

24

Typical spectrum of GaAlAs/GaAs laser



amjk 11-Aug-16

- Many spectral lines at $\lambda_{0,m}$

$$\lambda_{0,m} = \frac{2nL}{m} \quad \text{with integer } m$$

- Line spacing $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2Ln}$
- Typical line spacing $\Delta\lambda=0.2$ nm, and FWHM of Gaussian envelope 2 nm
- Temperature dependence of spectrum: typ. +0.2 to 0.7 nm/K
- Individual lines have a Lorentzian spectrum with coherence time τ_c

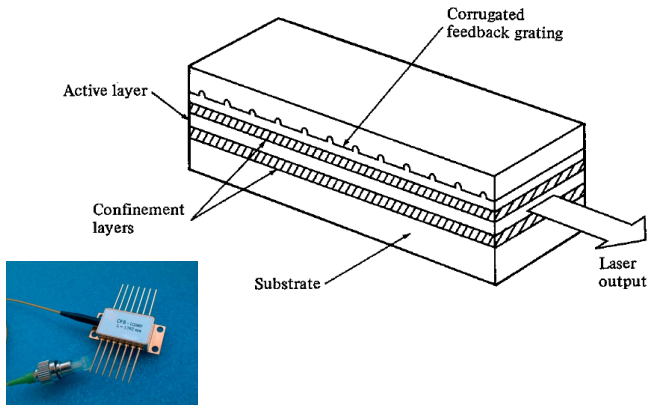
$$S(\omega) = \frac{2A\tau_c}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_c^2}$$

(typ. linewidth < 1 pm, and $\tau_c > 30$ ns
 \rightarrow coherence length $L_c = c_0 \tau_c > 10$ m)

TU/e

Distributed Feedback laser diode

25

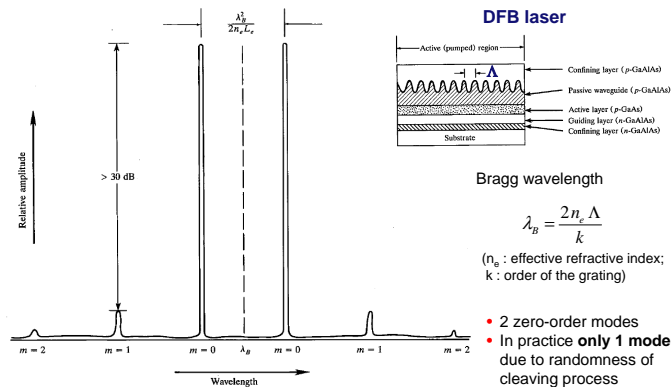


amjk 11-Aug-16

TU/e

Spectrum of ideal DFB laser diode

26



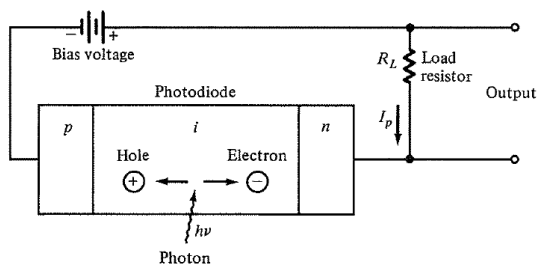
- current modulation also changes carrier density, and hence the emission wavelength → **laser wavelength chirp** (typ. in order of few MHz/mA)

amjk 11-Aug-16

TU/e

Photon detection

27



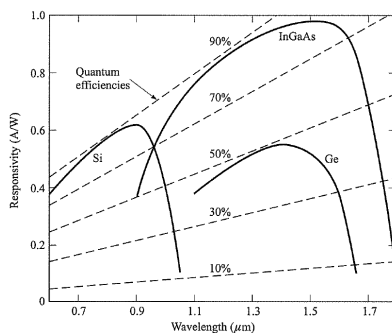
- Reverse biasing of photodiode
- photocurrent $I_p = R \cdot P_{rec}$
- with photodiode responsivity R (expressed in A/W)

amjk 11-Aug-16

TU/e

Photodiode responsivity

28



$$R = \frac{\eta e}{h\nu} = \frac{\eta e}{hc_0} \lambda_0 \quad [\text{A/W}]$$

$\lambda = 0.8$ to $0.9 \mu\text{m}$: Si
 $\lambda = 1.3$ to $1.6 \mu\text{m}$: InGaAs

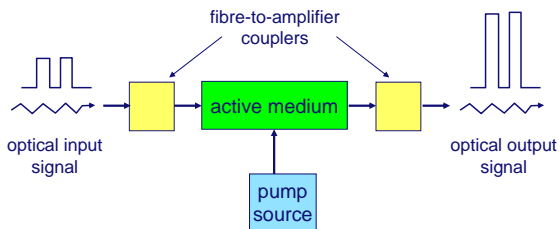
- When increasing λ : R grows proportional to λ (with some small deviation as absorption coefficient α depends on λ)
- Large λ : R declines sharply as photon energy $h\nu <$ bandgap energy E_g

amjk 11-Aug-16

TU/e

Generic optical amplifier

29



- Pump source (electrical or optical) excites electrons in active medium, yielding population inversion
- Incoming photons trigger excited electrons to drop \rightarrow stimulated emission
- **Optical Fibre Amplifier (OFA), or Doped Fibre Amplifier (DFA)** : optically pumped
- **Semiconductor Optical Amplifier (SOA)** : electrically pumped

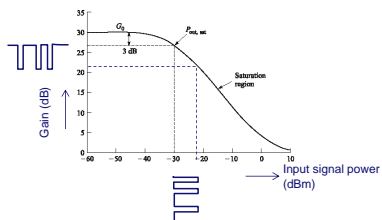
amjk 11-Aug-16

TU/e

Wavelength conversion

30

- By **cross-gain modulation (XGM)** in SOAs
 - only one wavelength at a time converted
 - input signal saturates SOA
 - limited data format transparency: only suited for digital IM signals
 - data polarity inversion

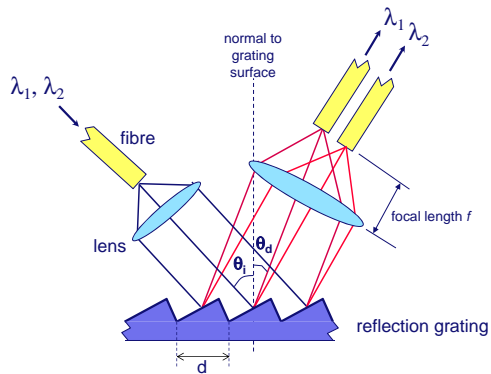


amjk 11-Aug-16

TU/e

Grating demultiplexer

31



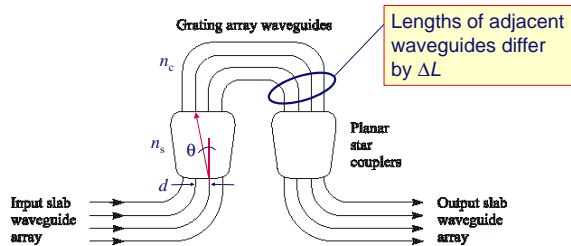
Grating equation $\sin \theta_i + \sin \theta_d = m \lambda / d$ with integer order m

amjk 11-Aug-16

TU/e

Phased Array (PHASAR), or Arrayed Waveguide Grating (AWG)

32



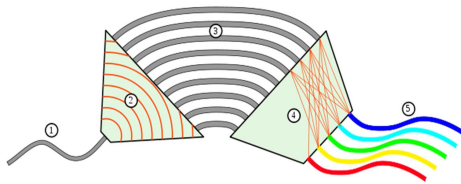
- **Grating equation** (phase matching) $n_s d \sin \theta + n_c \Delta L = m \lambda$ (interference order m)
- Pass wavelength for center input to center output waveguide $\lambda_c = n_c \Delta L / m$
- Channel spacing proportional to $1 / \Delta L$
- Periodic \rightarrow Free Spectral Range for opposite ports $\Delta \nu_{FSR} = c / n_g \Delta L$

amjk 11-Aug-16

TU/e

Arrayed Waveguide Grating as mux/demux

33



The incoming light (1) traverses a free space (2) and enters a bundle of optical fibers or channel waveguides (3). The fibers have different length and thus apply a different phase shift at the exit of the fibers. The light then traverses another free space (4) and interferes at the entries of the output waveguides (5) in such a way that each output channel receives only light of a certain wavelength. The orange lines only illustrate the light path. The light path from (1) to (5) is a demultiplexer, from (5) to (1) a multiplexer.

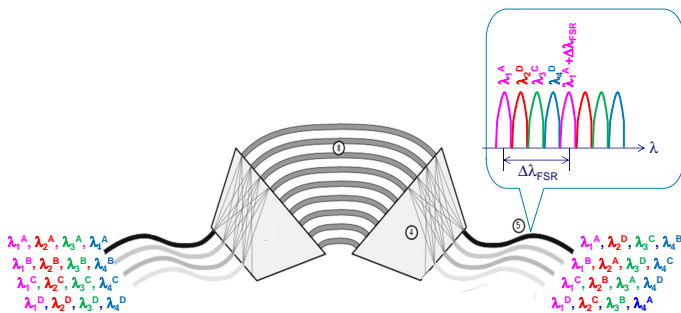
[http://en.wikipedia.org/wiki/Arrayed_waveguide_grating]

amjk 11-Aug-16

TU/e

Arrayed Waveguide Grating Router

34



- The wavelengths at each of the input ports are **cyclically routed** to the output ports
- Each output port contains a wavelength from each input port
- Cyclic periodicity: **Free Spectral Range** $\Delta\lambda_{FSR}$

amjk 11-Aug-16

TU/e

Outline

35

- The booming needs for telecom networks
- Optical communication – the toolbox
 - Optical fibres
 - Optical sources
 - Optical detectors
 - Optical amplifiers
 - Optical wavelength multiplexers
- Point-to-point fibre transmission link
 - Intensity Modulation – Direct Detection
 - Multiwavelength transmission
 - Coherent detection
- Optical networks
 - Network topologies
 - Wavelength routing
 - Wavelength conversion
- Optical metropolitan networks
 - Network routing node
 - Optical buffering
- Fibre-wireless access networks
 - Radio picocells
 - Dynamic capacity allocation
- Concluding remarks

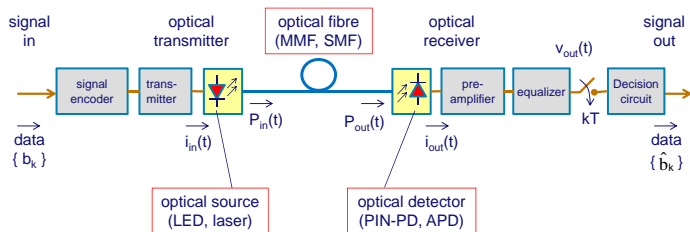
amjk 11-Aug-16

TU/e

Optical fibre transmission link

36

Intensity-Modulated Direct Detection (IM-DD) system



Binary IM-DD system: received pulse stream $P_{out}(t) = \sum_k b_k s_p(t - kT)$

where $s_p(t)$ is the intensity of individual pulse normalised to unit energy $\int_{-\infty}^{+\infty} s_p(t) dt = 1$

and thus b_k is the energy in the k^{th} pulse, with binary alphabet $b_k \in \{b_{\min}, b_{\max}\}$

amjk 11-Aug-16

TU/e

Quantum limit

37

- In theory, the maximum sensitivity of an optical receiver for a given P_e is reached when a single photon can be detected at that P_e
- The stream of incoming photons can be modelled as a **Poisson statistical process**, and thus also the stream of generated electrons in the photodiode.
- Assuming no thermal noise (so $\sigma_{th}=0$) and no light in a "0" bit (so $b_{min}=0$), the average electron arrival rate of the Poisson process during the pulse time τ is $\lambda\tau = \eta b_{max} / h\nu$
- So the **error probability** is the probability that no electron is generated at the arrival of a "1" bit :

$$P_e(b_{max}) = \Pr[n=0 | \langle n \rangle = \lambda\tau] = e^{-\lambda\tau} \cdot \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \Big|_{n=0} = \exp\left(-\frac{\eta}{h\nu} b_{max}\right)$$

For $P_e < 10^{-9}$ the requirement is then $b_{max} > 21 \cdot h\nu / \eta$.

⇒ when "0" and "1" bits are equiprobable, and an ideal photodiode with $\eta=1$ is assumed, **on average 10.5 photons per bit will be needed for $P_e=10^{-9}$.**

The average received optical power needed for a certain P_e is

$$P_{rec, req} = -\frac{1}{2T} \cdot \frac{h\nu}{\eta} \cdot \ln(P_e)$$

Quantum limit

- increases linearly with data rate 1/T

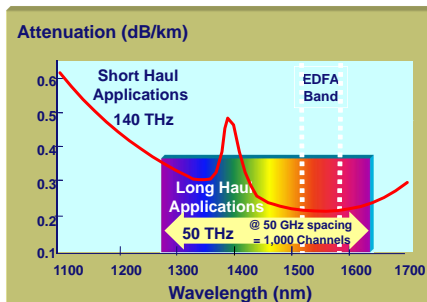
TU/e

amjk 11-Aug-16

Wavelength multiplexing in order to exploit the huge bandwidth of fibre

38

SMF: very low attenuation & very low dispersion



use **wavelength multiplexing** for increasing capacity, and also for flexible traffic routing

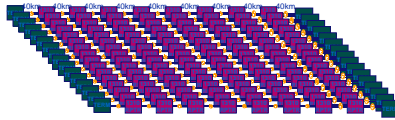
amjk 11-Aug-16

TU/e

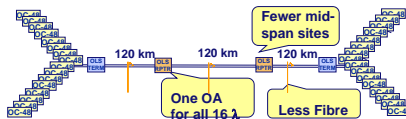
Simultaneous processing of many λ -channels

39

Conventional High Speed Transport - 40 Gb/s



Fibre Amplifier Based Optical Transport - 40 Gb/s



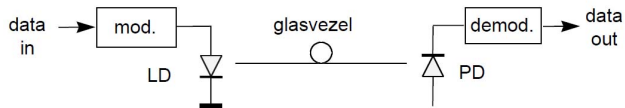
amjk 11-Aug-16

TU/e

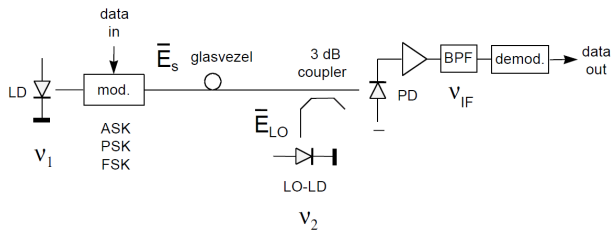
Coherent detection

40

Intensity Modulation – Direct Detection system



Coherent detection system

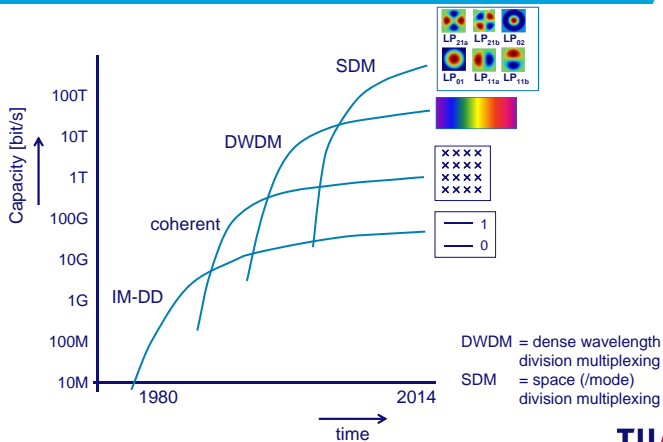


amjk 11-Aug-16

TU/e

Evolution of optical transmission techniques

41



amjk 11-Aug-16

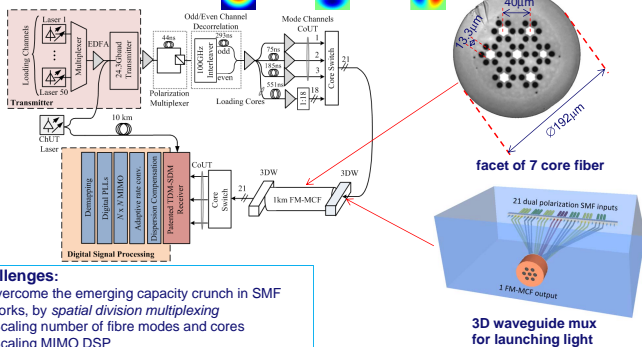
TU/e

Optical transmission beyond the capacity crunch

42

255 Tbit/s few-mode multi-core fibre transmission

Operation with 3 fibre modes: LP01, LP11a, LP11b



Challenges:

- To overcome the emerging capacity crunch in SMF networks, by *spatial division multiplexing*
- Scaling number of fibre modes and cores
- Scaling MIMO DSP
- Increasing link length

R.G.H. van Uden et al., *Nature Photonics*, 8 (11), Oct. 2014, pp. 865-870

amjk 11-Aug-16

MODE GAP

TU/e

Outline

43

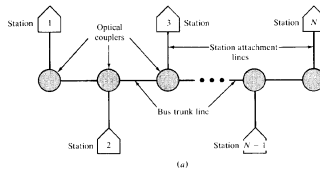
- The booming needs for telecom networks
- Optical communication – the toolbox
 - Optical fibres
 - Optical sources
 - Optical detectors
 - Optical amplifiers
 - Optical wavelength multiplexers
- Point-to-point fibre transmission link
 - Intensity Modulation – Direct Detection
 - Multiwavelength transmission
 - Coherent detection
- Optical networks
 - Network topologies
 - Wavelength routing
 - Wavelength conversion
- Optical metropolitan networks
 - Network routing node
 - Optical buffering
- Fibre-wireless access networks
 - Radio picocells
 - Dynamic capacity allocation
- Concluding remarks

amjk 11-Aug-16

TU/e

Network topologies (1/2)

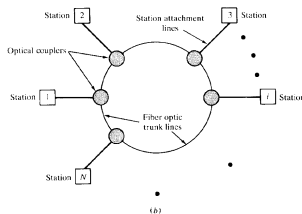
44



(a)

Bus

- no protection
- active coupler: O/E conversion
- passive coupler: tap opt. power



(b)

Ring

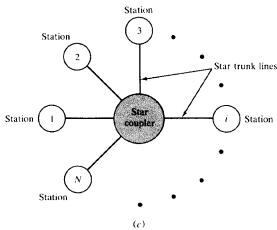
- limited protection (cw & ccw transmission possible)
- active coupler: recognise address in packets
→ accept / forward
- passive coupler: tap opt. power

amjk 11-Aug-16

TU/e

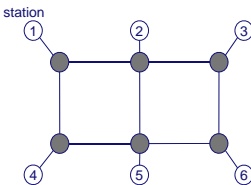
Network topologies (2/2)

45



Star

- no protection
- central node (hub)
- active hub: message routing
- passive hub: power splitting to all stations (star coupler)



Mesh

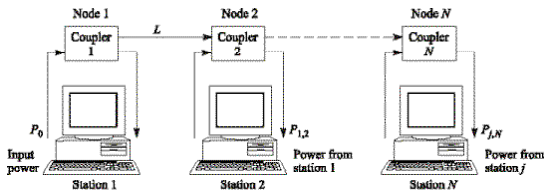
- multiple protection paths
- multiple nodes (hub)
- active node: message routing
- passive node: power splitting to all output ports

amjk 11-Aug-16

TU/e

Simple linear bus network

46



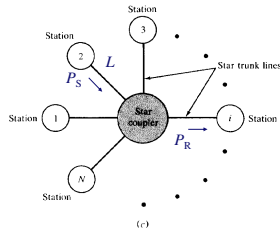
- **nearest-neighbour loss** $10 \log (P_0 / P_{1,2}) = \alpha L + 2 L_{\text{tap}} + 4 L_c + 2 L_i$ [dB]
- **largest-distance loss** $10 \log (P_0 / P_{1,N}) = (N-1) \alpha L + (N-2) L_{\text{thru}} + 2 L_{\text{tap}} + 2N L_c + N L_i$
(grows linearly with N)
- **dynamic range** $DR = 10 \log (P_{1,2} / P_{1,N}) = (N-2) \{ \alpha L + L_{\text{thru}} + 2 L_c + L_i \}$
(e.g., with $\alpha L = 0.2$ dB, $L_{\text{thru}} = 0.9$ dB, $L_c = 1$ dB, $L_i = 0.5$ dB :
 $DR = 10.8$ dB for $N = 5$, $DR = 28.8$ dB for $N = 10$)

amjk 11-Aug-16

TU/e

Star network with passive star coupler

47



Power-splitting star coupler, assuming all stations at distance L from coupler:

- **loss between each pair of stations**

$$10 \log (P_S / P_R) = 2 \alpha L + 10 \log N + 2 L_c + L_{\text{excess}}$$

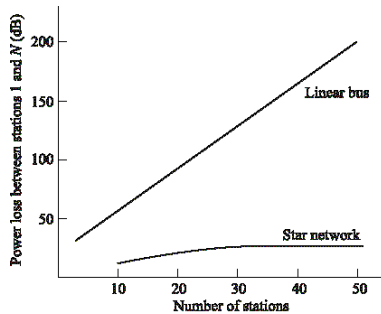
grows approximately as $\log N$

amjk 11-Aug-16

TU/e

Linear bus versus star coupler

48



αL	= 0.2 dB
L_{thru}	= 0.9 dB
L_{tap}	= 10 dB
L_c	= 1 dB
L_i	= 0.5 dB
L_{excess}	= 0.75 dB at $N = 10$ = 1.25 dB at $N = 50$

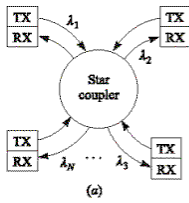
star network is the most power-efficient network topology

amjk 11-Aug-16

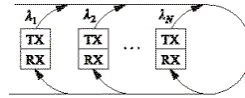
TU/e

Single-hop broadcast-and-select networks

49



(a)
star



(b)
bus

- **FT/TR**: - each transmitter sends at a fixed specific λ (Fixed Transmitter)
- each receiver has a tunable filter (Tunable Receiver)
- supports broadcast and multi-cast
- *issue*: privacy not secured
- **TT/FR**: - tunable transmitter, fixed receiver ('wavelength addressing')
- privacy secured
- *issue*: broadcast and multi-cast not supported

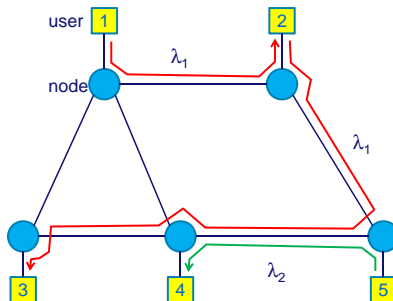
amjk 11-Aug-16

TU/e

Wavelength routing

50

- reduces number of wavelengths needed (**wavelength reuse**)
 - reduces splitting losses
- **allows larger networks**



amjk 11-Aug-16

TU/e

Impact of wavelength conversion

51



ρ = probability that a wavelength is used in a link (**wavelength utilisation***)
assumption: usage of a λ in a link is independent of other links and other λ -s

- with wavelength conversion:

Pr(not all wavelengths used in a link) = $1 - \rho^F$

blocking probability $P_b' = \text{Pr}(\text{all wavelengths used in at least one link})$

$P_b' = 1 - \text{Pr}(\text{no blocking in any link}) = 1 - (1 - \rho^F)^H$

→ **achievable utilisation for a given P_b'**

$$q = [1 - (1 - P_b')^{1/H}]^{1/F} = (P_b' / H)^{1/F}$$

- without wavelength conversion:

Pr(wavelength not used in H links) = $(1 - \rho)^H$

blocking probability

$P_b = \text{Pr}(\text{every wavelength used in at least one link}) = [1 - (1 - \rho)^H]^F$

→ **achievable utilisation for a given P_b**

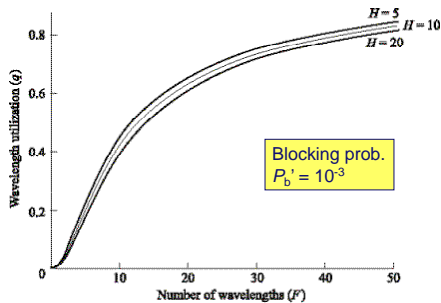
$$\rho = 1 - (1 - P_b^{1/F})^{1/H} \approx - (1/H) \cdot \ln(1 - P_b^{1/F})$$

* wavelength utilisation indicates the fraction of the system's traffic handling capacity which is actually used
 amjk 11-Aug-16

TU/e

Achievable wavelength utilisation q with λ -conv.

52



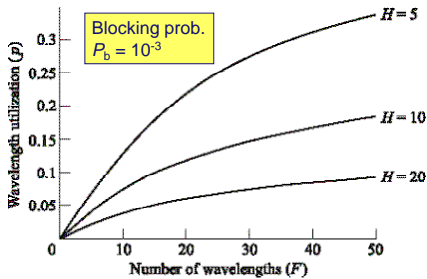
- Effect of path length H is small
- Achievable λ utilisation q quickly saturates at 1 for large F

amjk 11-Aug-16

TU/e

Achievable wavelength utilisation p w/o λ -conv.

53



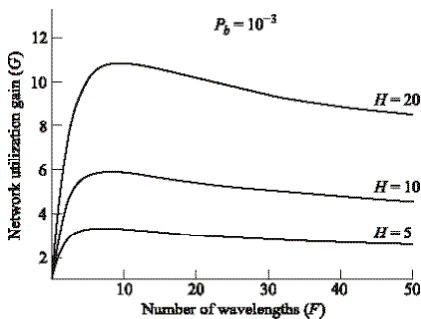
- Achievable λ utilisation p is approx. inversely proportional to H
 \rightarrow effect of path length is severe

amjk 11-Aug-16

TU/e

Utilization gain by wavelength conversion

54



q : achievable utilisation with wavelength conversion
 p : achievable utilisation without wavelength conversion
 (both for a given blocking probability P_b)

- gain $G = q / p$ significant at longer path lengths H
 \rightarrow then wavelength conversion is advantageous
- gain peaks at $F \approx H/2$ (and decreases at higher F , as q saturates)

amjk 11-Aug-16

TU/e

Outline

55

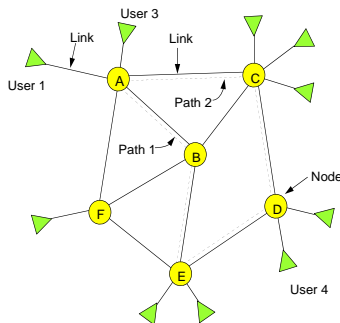
- The booming needs for telecom networks
- Optical communication – the toolbox
 - Optical fibres
 - Optical sources
 - Optical detectors
 - Optical amplifiers
 - Optical wavelength multiplexers
- Point-to-point fibre transmission link
 - Intensity Modulation – Direct Detection
 - Multiwavelength transmission
 - Coherent detection
- Optical networks
 - Network topologies
 - Wavelength routing
 - Wavelength conversion
- Optical metropolitan networks
 - Network routing node
 - Optical buffering
- Fibre-wireless access networks
 - Radio picocells
 - Dynamic capacity allocation
- Concluding remarks

amjk 11-Aug-16

TU/e

Circuit- vs. Packet-switching (1/2)

56



amjk 11-Aug-16

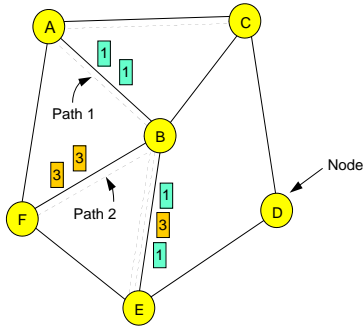
Circuit switching:

- reserve an end-to-end path from source to destination before starting information transfer
- a path consists of concatenated links
- each link may carry multiple channels (e.g. time-slot in TDM, frequency slot in FDM)
- each channel is exclusively dedicated for a source-destination connection
→ may use only part of the resources, thus not 100% efficient

TU/e

Circuit- vs. Packet-switching (2/2)

57



Packet switching:

- Partition data streams in packets
- Transport packets on individual basis
- A channel is no longer unique for a particular source-destination connection, but may carry packets of several connections
→ higher efficiency

Connection-oriented:

- packets are marked with a virtual circuit (VC) number
- Path is set up before data transmission begins
- e.g. ATM

Connection-less:

- No connection set-up/tear-down phase
- Packet is marked with source and destination address
- e.g. Ethernet

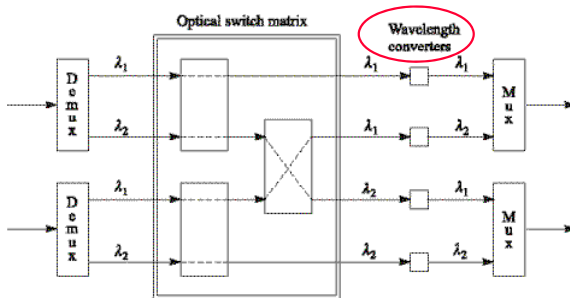
amjk 11-Aug-16

TU/e

Optical cross-connect with λ - conversion

58

- avoiding λ -contention by λ -conversion



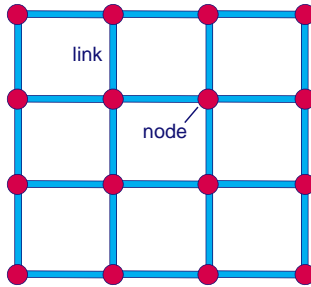
amjk 11-Aug-16

TU/e

Packet routing in mesh network

59

NET
WORKS



Routed mesh

- Path redundancy
- Link congestion
- End-to-end latency
- Wavelength re-use
- Traffic steering in nodes
- Queueing per node

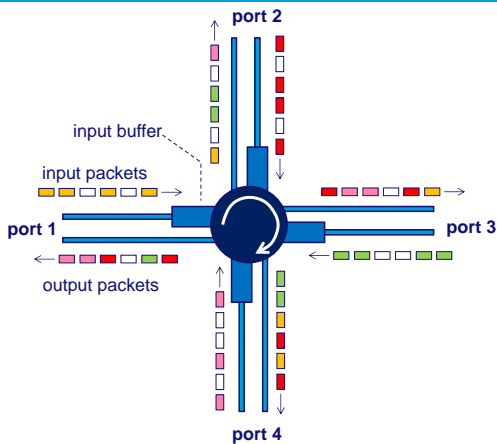
amjk 11-Aug-16

TU/e

Packet routing node – single wavelength plane

60

NET
WORKS



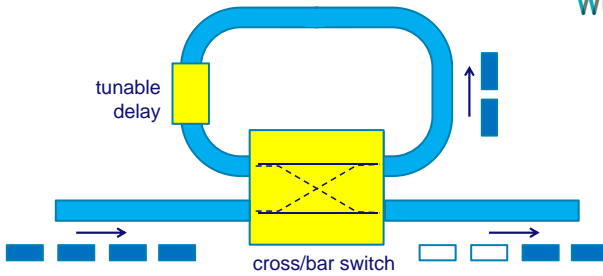
amjk 11-Aug-16

TU/e

Optical packet buffer

61

NET
WORKS



- Discrete buffering time
- Guard time between packets (/packet bursts)

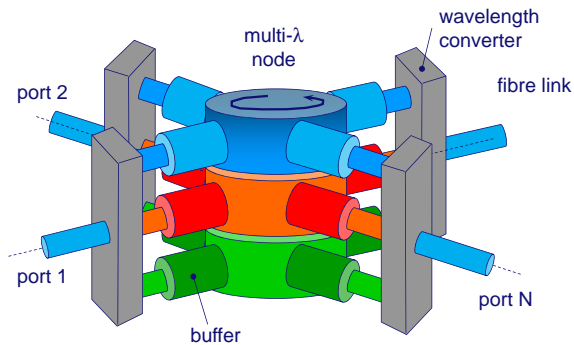
amjk 11-Aug-16

TU/e

Packet routing node – multiple wavelength planes

62

NET
WORKS



amjk 11-Aug-16

TU/e

Outline

63

- The booming needs for telecom networks
- Optical communication – the toolbox
 - Optical fibres
 - Optical sources
 - Optical detectors
 - Optical amplifiers
 - Optical wavelength multiplexers
- Point-to-point fibre transmission link
 - Intensity Modulation – Direct Detection
 - Multiwavelength transmission
 - Coherent detection
- Optical networks
 - Network topologies
 - Wavelength routing
 - Wavelength conversion
- Optical metropolitan networks
 - Network routing node
 - Optical buffering
- Fibre-wireless access networks
 - Radio picocells
 - Dynamic capacity allocation
- Concluding remarks

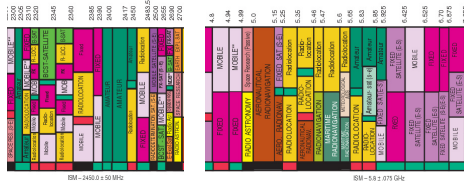
amjk 11-Aug-16

TU/e

Indoor radio wireless communications is nearing its limits

64

- More wireless traffic is already coming from indoor than from outdoor devices
- Booming number of devices ('Internet of Things')
- Spectrum congestion
- Interference among devices
- High-capacity radio is power-hungry



Radio spectrum occupation 2.3-2.7 GHz, 4.8-7.0 GHz

amjk 11-Aug-16

TU/e

Gbit/s wireless indoor access

65

Issues:

- radio spectrum congestion
- interference among wireless devices
- high power consumption

⇒ Wireless pico-cells:

- higher capacity per wireless device, frequency re-use
- energy savings DS and US
- dynamic capacity allocation, at fine granularity
- higher complexity

⇒ Fibre-fed pico-cells, with

- dynamic capacity allocation
- radio-over-fibre, radio beam steering
- optical wireless communication, with optical beam steering

amjk 11-Aug-16

TU/e

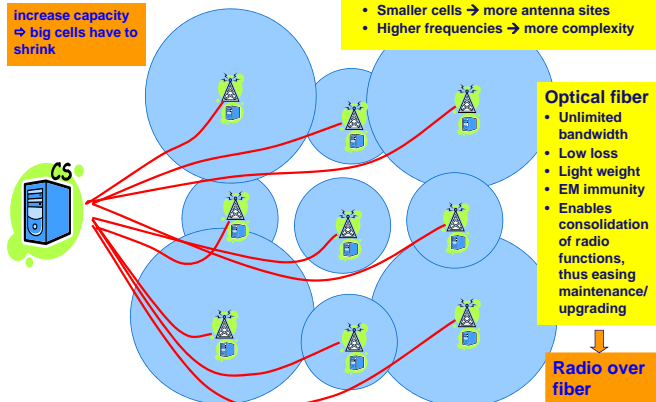
Radio over fiber

66

Increase capacity
⇒ big cells have to
shrink

To increase capacity:

- Smaller cells → more antenna sites
- Higher frequencies → more complexity

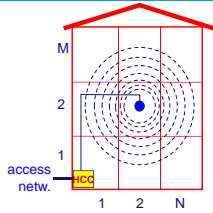


amjk 11-Aug-16

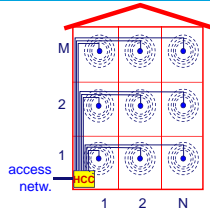
[courtesy of Maria Garcia Larrode]

Energy savings by RoF pico-cells (1/2)

67



IEEE802.11 a/g WiFi



60GHz pico-cell

- Radio emission power per antenna \sim (radius of cell R) $^\gamma$, K picocells
 $P_{WiFi} \equiv c R^\gamma \cdot$ (losses in walls) with path loss exponent $\gamma = 2 \dots 4$
 $P_{pico} \equiv K c (R/N)^\gamma = c \cdot R^\gamma \cdot K^{1-\gamma/2}$
- Reduced radio power from mobile device to antenna \rightarrow longer battery life
- Further energy savings by capacity-on-demand signal routing (e.g. by optical routing using radio-over-fiber)

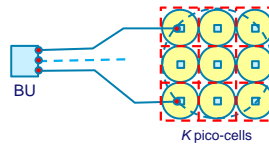
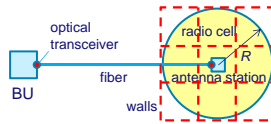
\Rightarrow pico-cell approach + radio signal routing save energy

amjk 11-Aug-16

TU/e

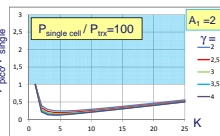
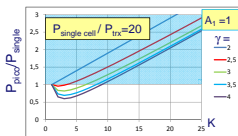
Energy savings by RoF pico-cells (2/2)

68



$$\frac{P_{tot, picocells}}{P_{tot, single cell}} = \frac{K^{1-\gamma/2}}{A_1 \sqrt{N} - \sqrt{N/K}} + \frac{2K \cdot P_{tx}}{P_{tot, single cell}} \left(1 - \frac{K^{-\gamma/2}}{A_1 \sqrt{N} - \sqrt{N/K}} \right)$$

- N : number of rooms
- A_1 : attenuation factor per wall crossing
- γ : path loss exponent ($\gamma=2$ in free space, γ may be up to 4 or more inside buildings)
- P_{tx} : power needed in optical transceiver



Optimizing the number of picocells K

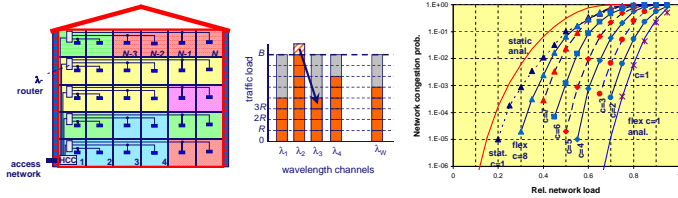
amjk 11-Aug-16 [Koonen et al, ECOC 2013]

TU/e

Improving network performance by dynamic capacity allocation

69

- λ -routing for dynamically allocating radio capacity to clusters of living units
- λ -routing: e.g. by tunable microring resonators, AWG + SOA gates, tunable FBG-s
- Analysis for WDM-TDM case ($N=160$ living units MDU building, 10λ -s, $B=1\text{Gbe}$ per λ , active LU requesting $R=100\text{MbE}$, cluster size c LU-s):



⇒ Dynamic wavelength routing with larger cluster size can improve network performance while restricting system complexity.

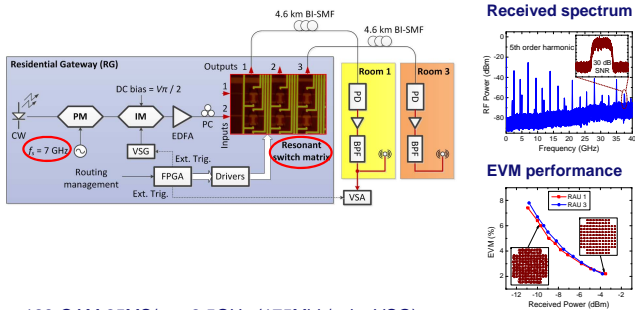
amjk 11-Aug-16

[Koonen et al, OFC2011, JLT Feb. 2014]

TU/e

Generation + routing of mm-wave radio-over-fiber signals

70



- 128-QAM 25MS/s at 2.5GHz (175Mbit/s, by VSG)
- Translated to 37.5GHz by **Optical Frequency Multiplying technique** (on 5th harmonic of 7GHz, by PM-IM conversion in resonant element)
- Routing by **resonant switch matrix**, within 68 μ s under FPGA control

amjk 11-Aug-16

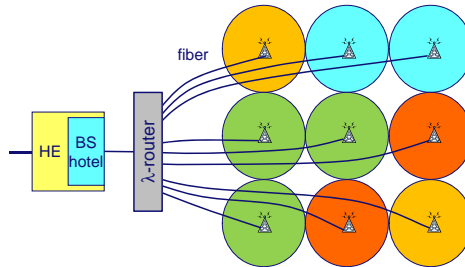
[S. Zou et al., OFC2014, paper Th1D.5;
A.M.J. Koonen, M. Garcia Larralde, JLT Aug. 2008]

TU/e

Radio-over-fibre dynamically fed pico-cell network

71

NET
WORKS



Project goals:

- to develop efficient algorithms for assigning users and allocating power and spectral resources to the various pico-cells in such networks
- to develop coordinated dynamic capacity allocation deploying fibre-optic feeder lines to the pico-cells and multi-wavelength routing techniques

amjk 11-Aug-16

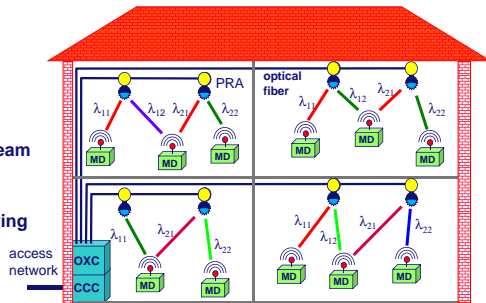
TU/e

Wireless optical communication with steered beams

72

BROWSE's system concept:

- **pencil beams** → no capacity sharing, long reach
- **IR $\lambda > 1400\text{nm}$** → P_{beam} up to 10mW
- **passive diffractive beam steerer** → no local powering
- **λ -controlled 2D steering** → embedded control channel, can handle multiple beams
- **target:**
 $\geq 10\text{Gbit/s per beam}$



OXC = Optical Crossconnect
CCC = Central Communication Controller

MD = Mobile Device
PRA = Pencil-Radiating Antenna
RN = Reconfiguration Node

European Research Council



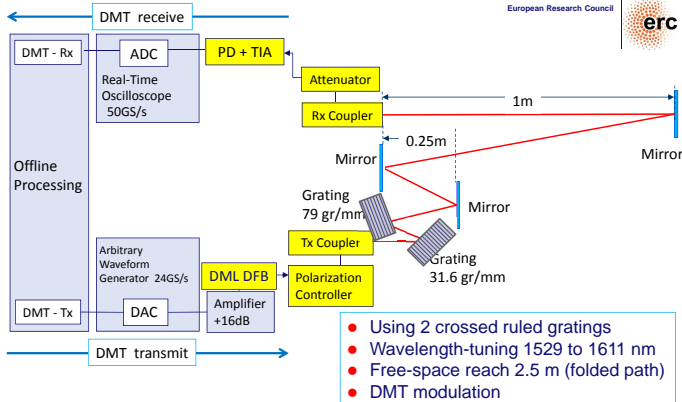
amjk 11-Aug-16

[Koonen et al, MWP2014, OECC2014, MWP2015]

TU/e

Experiment: 42.8Gbit/s 2D optical beam steering

73



amjk 11-Aug-16

[Joanne Oh, Eduward Tangdongga, Ton Koonen et al, OFC2015]

TU/e

Concluding remarks

74

- Optical fibre is a transmission medium with unequaled extremely large bandwidth and extremely low losses.
- Optical fibre communication systems improve sustainability, by being future-proof and energy-saving.
- Initially introduced in core networks, optical fibre has now invaded the metropolitan networks, and is entering access (fibre-to-the-home) and indoor networks.
- Optical networks offer the wavelength dimension as an extra dimension not only for capacity extension, but also for new networking flexibility options yielding better usage of network resources and energy savings.

**NET
WORKS**

THE NETWORK CENTER .NL

amjk 11-Aug-16

TU/e

3 Storingsgevoeligheid van netwerken

Floske Spieksma

Inleiding

Hoe gevoelig is een trein- of metronetwerk voor grote oponthouden als er op een traject een incident gebeurt? Zijn er voldoende omleidingsmogelijkheden, of moeten reizigers gestrand op een station kamperen...

De storingsgevoeligheid van twee netwerken kan alleen zinvol vergeleken worden, als er een maat is die 'storingsgevoeligheid' kwantificeert. Een metronetwerk kan gemodelleerd worden als een collectie stations ('knooppunten') en trajecten tussen stations ('takken tussen knooppunten') oftewel een 'graaf'. Een lage storingsgevoeligheid betekent een hoge 'robuustheid'.

We zullen een aantal eigenschappen bespreken waaraan zinvolle maten moeten voldoen. Daarnaast laten we een aantal robuustheidsmaten de revue passeren, met name de maat die 'effectieve weerstand' heet.

Deze maat is gebaseerd op de weerstand in elektrische netwerken, en heeft de interessante eigenschap dat zij niet alleen via de wetten van Kirchhoff en Ohm, maar ook op minstens zes andere manieren berekend kan worden: onder andere aan de hand van opspannende bomen van een graaf, of via de trajectduur tussen twee willekeurige steden van een random rijdende trein.

Interpreteer nu steden als mensen en een random rijdende trein als een verstuurd wordende kettingbrief. Dan is de trajectduur van een random rijdende trein vanaf een willekeurige stad naar Amsterdam niet anders dan de duur die een kettingbrief erover doet om de Paus te bereiken, wanneer de kettingbrief steeds naar een willekeurige bekende wordt doorgestuurd.

Dat laatste doet denken aan de bekende 'six degrees of separation' uitspraak: de gemiddelde afstand tussen U en de Paus is hooguit zes. Wat betekent dat? De kettingbrief is gebruikt in een experiment in de 60'er jaren (als eerste van vele) om de 'six degrees of separation' hypothese te testen.. Klopt dit eigenlijk wel, hoe kunnen we dit inzien en wat is de relatie met 'robuustheid van een netwerk'?

3.1 Gemiddelde afstand en kortste paden

Grafen zijn een standaard representatie van netwerken als een wegenennetwerk (zie Fig. 3.1). Ook sociale netwerken, en het collectivum van onderlinge links tussen webpagina's kan men hiermee modelleren.

Formeel bestaat een graaf $G = (V, E)$ uit een eindige niet-lege verzameling V , de *knooppunten*, en een niet-geordende verzameling E van tweetallen uit V , de *takken*. Het aantal knooppunten, respectievelijk het aantal takken, geven we aan met n , respectievelijk m .

Als $e = (i, j) \in E$, dan zeggen we dat e *incident* is met i en met j . De graad $d(i)$ van knooppunt $i \in V$ is het aantal takken dat incident is met i , en $N(i) \subset V$ is de collectie knooppunten die via een tak met knooppunt i verbonden is.

Een *takkenreeks* is een rij takken, waarbij elk tweetal opeenvolgende takken een knooppunt gemeen heeft. De takkenreeks heet een *keten* als elke tak hooguit één keer in de takkenreeks voorkomt.

Een belangrijk concept is *samenhang*: een graaf G heet *samenhangend* als er tussen elk tweetal knooppunten een keten in G is. Een samenhangende graaf heet een *boom* als er tussen elk knooppunten precies één keten is, oftewel, $m = n - 1$. Omdat robuustheid een maat voor de onderlinge verbondenheid van het netwerk, of de graaf, is, zullen we slechts samenhangende grafen bestuderen.

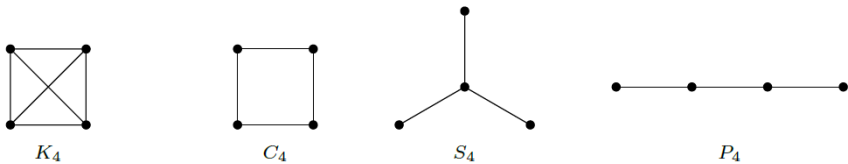
Een goede robuustheidsmaat moet voldoen aan de volgende eigenschappen:

- de maat moet gebaseerd zijn op eigenschappen die gerelateerd zijn aan onze intuïtie met betrekking tot robuustheid;
- de maat moet gemakkelijk te berekenen zijn;
- bij een toenemend aantal takken mag de robuustheid niet afnemen.

Laten we de volgende grafen eens bekijken:



Figuur 3.1: Metronet Amsterdam



Van links naar rechts worden de grafen respectievelijk de volledige graaf K_4 , de cykelgraaf C_4 , de stergraaf S_4 en de padgraaf P_4 genoemd. ‘Volledig’ betekent dat er door toevoeging van takken parallelle takken ontstaan of lussen. De index 4 slaat op het aantal knooppunten.

Achtereenvolgens worden deze grafen gevoeliger voor uitval van takken, ze zijn ‘minder verbonden’ en derhalve moet een goede robuustheidsmaat de grafen in die volgorde lager waarderen.

Verbondenheid kan gekwantificeerd worden via de afstand tussen een willekeurige paar knooppunten. Hoe korter de afstand tussen twee knooppunten des te ongevoeliger de verbinding is voor storingen.

Zij $G = (V, E)$ een samenhangende graaf. De *afstand* d_{ij} tussen knooppunten i en j is het aantal takken in de kortste keten tussen i en j . De *gemiddelde afstand* \bar{d} is dan

$$\bar{d} = \frac{2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n d_{ij}}{n(n-1)},$$

met andere woorden, de som van alle afstanden gedeeld door het maximale aantal takken in een volledige graaf.

De maat \bar{d} is in het algemeen niets anders dan de ‘degree of separation’ in een sociale netwerk graaf. Hierin worden de mensen uit het sociale netwerk gepresenteerd als knooppunten. De aanwezigheid van een tak representeert dat ‘incidente’ mensen elkaar kennen, een soort ‘kennis’-graaf dus! We schrijven ‘in het algemeen’ omdat er geen eenduidige definitie van het aantal ‘degrees of separation’ lijkt te zijn.



Soms wordt er met ‘degrees of separation’ bedoeld: ‘de maximale afstand die zich voordoet in het genoemde sociale netwerk’. Dat deze hooguit zes zou zijn, is overigens natuurlijk onzin, wanneer we alle mensen op Aarde beschouwen! Wij houden hier dus op \bar{d} !

Een tweede maat is gekoppeld aan de takken: de *takspreiding* (edge betweenness). Dit is een gewogen som van het aantal kortste ketens tussen elk knooppuntenpaar dat door tak e gaat. Zij $n_{ij}(e)$ het aantal kortste ketens tussen knooppunten i en j dat door tak e gaat, en n_{ij} het aantal kortste ketens tussen i en j . Dan is $n_{ij}(e)/n_{ij}$ de fractie van kortste ketens tussen i en j die door tak e gaat. De robuustheid is slechter naarmate deze fractie groter is. Immers, het aantal alternatieven voor routes door e is dan kleiner.

Als een graaf een verkeersnetwerk modelleert, waarbij de hoeveelheid verkeer over elke tak gelijk is, en verkeer altijd de kortste weg (keten) neemt, dan kunnen we $\sum_{j>i} n_{ij}(e)/n_{ij}$ als de belasting van tak e interpreteren. Hiermee kunnen file-gevoelige wegdelen worden geïdentificeerd.

We definiëren de *takspreiding* $\bar{n}(e)$ van tak e als

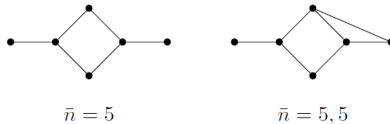
$$\bar{n}(e) = \sum_{j>i}^n \frac{n_{ij}(e)}{n_{ij}}.$$

Dan is $\bar{n} = \max_e \bar{n}(e)$ de takspreiding van de graaf. Girvan en Newman [2] gebruikten de takverbondenheid om sociale subgemeenschappen te identificeren. Het idee is dat takken met een hoge waarde $\bar{n}(e)$ corresponderen met de *relaties tussen* de verschillende gemeenschappen.

Voor de 4 grafen zijn de gemiddelde afstand en takspreiding als volgt:

	K_4	C_4	S_4	P_4
\bar{d}	1	4/3	3/2	5/3
\bar{n}	1	2	3	4

De uitkomsten van deze twee maten komen overeen met onze intuïtie over de netwerken. De gemiddelde afstand neemt af door toevoeging van takken. Het volgende voorbeeld laat zien dat de takspreiding niet noodzakelijk afneemt.



Opgave 3.1.1. *Ga na dat de tweede graaf inderdaad een grotere takspreiding heeft.*

De maat ‘takspreiding’ voldoet dus niet aan de eisen voor een robuustheidsmaat. De ‘gemiddelde afstand’ heeft dit nadeel niet.

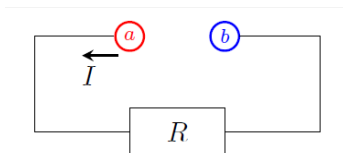
Hij heeft wel het nadeel dat alleen kortste ketens worden meegewogen, en niet het aantal alternatieve routes. Verder is de gemiddelde afstand niet gemakkelijk te berekenen bij grote grafen. We zullen daarom een alternatieve maat beschouwen.

Alvorens hiertoe over te gaan, zult U zich afvragen of we niet ook de daadwerkelijke weglengtes zouden moeten meemodelleren. Dat kan inderdaad, zie onderstaande opgave.

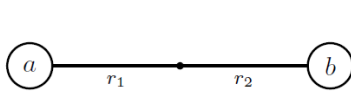
Opgave 3.1.2. *Stel dat de lengte van tak (i, j) niet gelijk is aan 1, maar lengte $l(i, j)$ heeft. Hoe moet de formule voor de gemiddelde afstand dan worden aangepast? Stel vervolgens dat we de ‘verkeersbelasting’ van wegen in een wegennetwerk willen meemodelleren. Uitval van een wegdeel (tussen twee knooppunten) met een hoge verkeersbelasting wordt als schadelijker ervaren dan uitval van een wegdeel met een lage verkeersbelasting. Pas de formule voor de gemiddelde afstand hierop aan.*

3.2 Elektrische netwerken

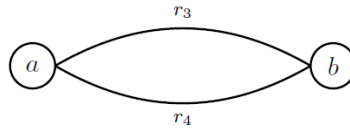
We zullen nu een robuustheidsmaat introduceren die gebaseerd is op elektrische netwerken. Het idee is dat bij een vast spanningsverschil een toenemende weerstand voor een lagere stroom zorgt. Een lagere stroom kunnen we opvatten als een slechtere verbondenheid.



Voor het berekenen van de weerstand tussen twee knooppunten van een elektrisch netwerk, kunnen we de bekende regels voor serie- en parallelschakeling toepassen. De waarden van de vervangingsweerstand tussen knooppunten a en b , oftewel de *effectieve weerstand* R_{ab} , staan in de onderstaande figuren.



$$R_{ab} = r_1 + r_2$$



$$R_{ab} = \frac{1}{\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}}$$

Opgave 3.2.1. Beschouw het deel van Amsterdamse metronetwerk tussen Centraal Station via Spaklerweg naar Zuid. Dit bevat delen van de groene, gele, rode en oranje lijnen, maar niet van de blauwe. Modelleer dit als een elektrisch netwerk met een spanningsbron tussen Zuid en Centraal, waarbij aan elke tak van het metronetwerk een weerstand van 1 Ohm is toegekend. Bereken de effectieve weerstand $R_{\text{Centraal, Zuid}}$.

U ziet dat dit niet zonder meer te generaliseren is naar een graaf. Hoe zouden we überhaupt de weerstanden in de K_4 of K_5 moeten berekenen?

We kunnen dit oplossen met behulp van de stroomwet van Kirchhoff (stroom in = stroom uit, in elk knooppunt ongelijk aan de spanningsbron) en de wet van Ohm ($V = IR$).

Beschouw een elektrisch netwerk met spanningsbron tussen a en b , gerepresenteerd als een graaf. Er loopt een stroom ter grootte van 1 Ampère van a naar b . De weerstand tussen twee aangrenzende knooppunten i en j is r_{ij} , en de stroom door de tak van i naar j is y_{ij} (N.B. $y_{ij} = -y_{ji}$!). Van de stroomgroottes weten we op dit moment slechts dat $\sum_{j \in N(a)} y_{aj} = 1$ en $\sum_{j \in N(b)} y_{bj} = -1$.

Volgens de wet van Ohm is het spanningsverschil tussen i en j gegeven door: $v_i - v_j := r_{ij} y_{ij}$. Volgens de stroomwet van Kirchhoff geldt dat

$$\sum_{j \in N(i)} \frac{v_i - v_j}{r_{ij}} = \sum_{j \in N(i)} y_{ij} = \begin{cases} 1, & i = a \\ 0, & i \neq a, b \\ -1, & i = b. \end{cases} \quad (3.1)$$

Oplossen van dit stelsel geeft de spanningen $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in V}$. Volgens de wet van Ohm, geldt $v_a - v_b = R_{ab} \cdot 1 = R_{ab}$. Kortgezegd, vervanging van het hele netwerk door één tak tussen a en b met vervangingsweerstand R_{ab} , geeft het gevraagde spanningsverschil.

Bovenstaand lineair stelsel vergelijkingen kunnen we nu gebruiken om de effectieve weerstand te definiëren voor een samenhangende graaf $G = (V, E)$. Neem aan, dat er geen parallelle takken en lussen zijn. Geef

elke tak een weerstand 1 (Ohm): $r_{ij} = 1$, $(i, j) \in E$. Definieer de $n \times n$ Laplaciaan matrix L_G als volgt:

$$L_G(i, j) = \begin{cases} d(i), & i = j \\ -1, & j \neq i \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Voor de S_4 krijgen we dan (met knooppunt 1 als het middelste knooppunt)

$$L_{S_4} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & & \\ -1 & & 1 & \\ -1 & & & 1 \end{pmatrix},$$

waarbij de 0-en zijn weggelaten. Met $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in V}$ reduceert stelsel (3.1) tot

$$L_G \mathbf{v} = \mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b, \quad (3.2)$$

met \mathbf{e}_i de n -dimensionale (kolom)vector met i -de component gelijk aan 1 en de rest 0.

Opgave 3.2.2. *Verifieer dit.*

Schrijf $\mathbf{1}_n$ voor de n -dimensionale (kolom)vector bestaande uit alleen 1-en, en $\mathbf{0}_n$ voor de n -dimensionale (kolom)vector bestaande uit alleen 0-en. Dan geldt

$$L_G \mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n,$$

zodat $\mathbf{1}_n$ een (rechter-)eigenvector bij eigenwaarde 0 is. De matrix L_G is dientengevolge singulier, en vergelijking (3.2) niet uniek oplosbaar is, mits er überhaupt een oplossing is.

Het kan bewezen worden dat in een samenhangende graaf de dimensie van de nulruimte van L_G gelijk is 1. In het onderhavige geval is de nulruimte $\{\alpha \mathbf{1} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Aangezien L_G een symmetrische matrix is, heeft L_G dientengevolge een orthogonale basis van eigenvectoren. Omdat $\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b \perp \mathbf{1}$, is $\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b$ een lineaire combinatie van de eigenvectoren ongelijk $\mathbf{1}_n$. Dit impliceert dat vergelijking (3.2) ook minstens één oplossing heeft.

Uit bovenstaande volgt onmiddellijk dat het verschil $v_a - v_b$ onafhankelijk is van de gekozen oplossing \mathbf{v} van (3.2). Elke willekeurige oplossing \mathbf{v} van vergelijking (3.2) voldoet.

Definitie 3.2.3. *Laat $G = (V, E)$ een samenhangende graaf zijn, zonder parallelle takken en lussen en laat \mathbf{v} een oplossing van vergelijking (3.2) zijn.*

- $R_{ab} = v_a - v_b$ is effectieve weerstand tussen twee knopen a, b .
- $R^{tot} = \sum_{j>i} R_{ij}$ is de totale effectieve weerstand.

De totale effectieve weerstand zullen we als maat gebruiken voor de robuustheid van een netwerk: een hogere weerstand staat voor een lagere robuustheid.

Daartoe moeten we nog wel nagaan of deze voldoet aan de eigenschappen die we hadden gepostuleerd. Op het eerste gezicht lijkt de totale effectieve weerstand verder ook niet gemakkelijk te berekenen: per paar (a, b) lijken we een singulier stelsel vergelijkingen te moeten oplossen. We zullen zien dat dat meevalt.

3.3 Berekening R_{ab} en R^{tot} via vegen

De centrale uitspraak waarmee de effectieve weerstanden berekend kunnen worden is de volgende. Eerst weer enige notatie: $L_{G,[i]}$ is de matrix waarbij de i -de rij en kolom van L_G zijn weggelaten. De matrix $L_{G,[i,j]}$ is de matrix waarbij i -de en j -de rij en kolom zijn weggelaten. De getransponeerde van een (kolom)vector \mathbf{v} is de rijvector \mathbf{v}' .

Stelling 3.3.1. *Kies $b \in V$ willekeurig. Dan is $L_{G,[b]}$ inverteerbaar met inverse $L_{G,[b]}^{-1}$, en er geldt:*

$$R_{ij} = \begin{cases} L_{G,[b]}^{-1}(i, i), & j = b, i \neq b \\ L_{G,[b]}^{-1}(j, j), & j \neq b, i = b \\ L_{G,[b]}^{-1}(i, i) + L_{G,[b]}^{-1}(j, j) - L_{G,[b]}^{-1}(i, j) - L_{G,[b]}^{-1}(j, i), & i, j \neq b \end{cases}$$

en

$$R^{tot} = n \sum_i L_{G,[b]}^{-1}(i, i) - \mathbf{1}'_{n-1} L_{G,[b]}^{-1} \mathbf{1}_{n-1}.$$

Merk op dat de effectieve weerstanden symmetrisch zijn: $R_{ij} = R_{ji}$!

Laten we de effectieve weerstanden berekenen voor de stergraaf S_3 . Kies

$b = 1$, met knooppunt 1 het centrale knooppunt. Dan volgt

$$L_{S_4,[1]} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

en dus geldt $L_{S_4,[1]}^{-1} = L_{S_4,[1]}$, zodat $R^{\text{tot}} = 4 \cdot 3 - 3 = 9$.

Het lijkt vreemd dat dit onafhankelijk is van het gekozen uitgezonderde knooppunt. Voor wie het niet gelooft, (en om U daarmee het vegen weer in herinnering te brengen), zullen we dit nogmaals doen, maar dan met $b = 4$:

$$L_{S_4,[4]} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix},$$

Vegen houdt in dat door rijoperaties de matrices $L_{S_4,[4]}$ en de identiteit I simultaan naar I en de inverse $L_{S_4,[4]}^{-1}$ worden getransformeerd:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & -1 & 1 & \\ -1 & 1 & & & 1 \\ -1 & & 1 & & 1 \end{array} \right)$$

Tel $1/3$ keer de eerste rij bij de twee volgende rijen op:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & -1 & 1 & \\ & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 1 \\ & -1/3 & 2/3 & 1/3 & 1 \end{array} \right)$$

Tel nu $1/2$ keer de tweede rij bij de derde op:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -1 & 1 & & \\ & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 1 & \\ & & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right).$$

We maken nullen in de derde kolom door twee keer de derde rij bij de eerste op te tellen en $2/3$ -de keer bij de tweede:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & & 2 & 1 & 2 \\ & 2/3 & & 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ & & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right)$$

Tel nu $3/2$ -de keer de tweede rij bij de eerste op:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & & & 3 & 3 & 3 \\ & 2/3 & & 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ & & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right)$$

Nu nog de eerste rij met $1/3$ vermenigvuldigen, de tweede met $3/2$ en de derde met 2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right),$$

zodat

$$L_{S_4, [4]}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Inderdaad geldt weer: $R^{\text{tot}} = 9!$

Bewijs van Stelling 3.3.1 Zonder verlies van algemeenheid kunnen we knooppunt b als het hoogste genummerde knooppunt n kiezen. Pas een veegprocedure op $(L_G | I)$ toe, waar bij als eerste stap de eerste $n - 1$ rijen bij de laatste worden opgeteld. Om de rijssommen van L_G de nul-vector opleveren, bestaat de laatste rij uit

$$(\mathbf{0}_n | \mathbf{1}_n),$$

en daar gebeurt verder niets meer mee. Doorvegen op de eerste $n - 1$ rijen levert uiteindelijk $(T|S)$ op, met

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & 1 & & -1 \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad S = \begin{pmatrix} L_{G, [n]} & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{1}_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

De laatste kolom van T kan worden verklaard uit het feit de L_G kolomsommen 0 heeft, en die eigenschap verandert niet door veegen. De rij-operaties die T uit L_G genereren, maken de identiteit I tot S , hetgeen impliceert dat $SL_G = T$.

Bekijk de vergelijking $L_G x = y$. Er geldt: $SL_G x = Tx$, oftewel

$$Sy = Tx = x - x_n \mathbf{1}_n.$$

Laat $a, b \in V$, en vul $y = \mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b$ in. Dan geldt

$$x_a - x_b = S(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)_a - S(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)_b.$$

De vorm van S in aanmerking nemende, volgt de uitspraak van de stelling direct. \square

- Opgave 3.3.1.** 1. Bereken de effectieve weerstanden en de totale effectieve weerstand voor de padgraaf P_4 .
2. Vergelijk $R_{a,b}$ met de afstand $d_{a,b}$, en R^{tot} met \bar{d} .
3. Doe dezelfde vergelijking maar dan voor de stergraaf S_4 .
4. Kunt U een algemene uitspraak hierover formuleren?

Zoals eerder opgemerkt, kan de modelleerder het belangrijk vinden om weglengtes in wegennetwerk mee te modelleren, of de verkeersbelasting. Ook zal U vast niet ontgaan zijn, dat aan de eis dat er geen parallele takken zijn door het Amsterdamse metronetwerk niet wordt voldaan.

Opgave 3.3.2. • Opgave 3.1.2 met ‘gemiddelde afstand’ vervangen door ‘effectieve weerstand’. Dit komt neer op het definiëren van geschikte weerstanden op de takken en het bouwen van een equivalent van de Laplaciaan matrix (de zogenaamde gewogen Laplaciaan matrix). Beschouw voor Uw ideevorming eerst het stuk van het Amsterdamse metronetwerk tussen Centraal en Zuid, maar nu inclusief de blauwe lijn.

- Geldt de uitspraak van Stelling 3.3.1 met een gewijzigde Laplaciaan?

Ik hoop dat ik U ervan heb kunnen overtuigen dat de effectieve weerstand gemakkelijk te berekenen is... Ook numeriek is deze matrix goed te invertieren.

We zijn nog niet ingegaan op de vraag of de effectieve weerstand wel aan de derde eis voldoet, namelijk dat deze niet toeneemt na toevoeging van takken.

Lemma 3.3.2. *Bij toevoeging van een tak tussen knooppunt a en b , neemt de effectieve weerstand tussen elk paar knooppunten niet toe.*

Deelbewijs Lemma 3.3.2. Beschouw de matrix $L_{G,[b]}$. Door toevoeging van de tak (a, b) verandert slechts het element $L_{G,[b]}(a, a)$. Via vegen kun je aantonen dat R_{ab} afneemt.

Opgave 3.3.3. *Bewijs Lemma 3.3.2.*

In de volgende twee paragrafen gaan we in op alternatieve interpretaties van de effectieve weerstand.

3.4 Gemiddelde afstand via een random surfer

Gegeven een samenhangende graaf. Een random surfer surft van knooppunt naar knooppunt: op het moment dat hij in knooppunt i is, kiest hij een volgend knooppunt $j \in N(i)$ met kans $1/d(i)$. Die kansen zijn dus afhankelijk van het knooppunt waarin de surfer zich bevindt, en die kunnen we daarom het handigst in een matrix representeren, die we P_G noemen:

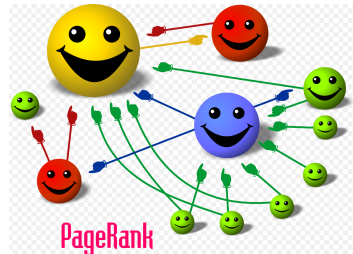
$$P_G(i, j) = \frac{1}{d(i)}, \quad j \neq i, \quad j \in N(i), \quad i \in V.$$

Voor de stergraaf S_4 is dit

$$P_{S_4} = \begin{pmatrix} & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

Degenen onder U die zich met Markovketens hebben beziggehouden herkennen hierin de transitiematrix van een Markovketen.

Hoe kan surfen leiden tot een formule voor de effectieve weerstand? Analoog aan hoe surfen leidt tot een waarde voor Google PageRank. De webgraaf is de graaf met als knooppunten *alle* webpagina's (bijna 4,5 miljard..), waar bij er een gerichte tak (i, j) als er een link op pagina i naar pagina j is.



De Google PageRank van pagina i is in feite de fractie van het aantal bezoeken van een random surfer aan pagina i (modulo nog enkel details en onbekende trucs die Google langzamerhand heeft ingebouwd).

Laten we de Laplaciaan eens vergelijken met P_G . De volgende relatie geldt:

$$D(\mathbf{I} - P_G) = L_G,$$

waarbij D een diagonaal matrix is met $D(i, i) = d(i)$. Evenzo geldt een analoge formule voor $L_{G,[b]}$:

$$D_{[b]}(\mathbf{I} - P_{G,[b]}) = L_{G,[b]}.$$

Voor S_4 geldt dat $P_{S_4,[1]}$ de nulmatrix is. In het algemeen zijn de rijssommen van $P_{G,[b]}$ niet alle meer gelijk aan 1, en wegens de samenhang van de graaf

impliceert dit dat de inverse matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{G,[b]})$ bestaat en gelijk is aan

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{G,[b]})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_{G,[b]}^k,$$

waarbij $\mathbf{P}_{G,[b]}^k$ de k -de macht van de matrix is. N.B. dit is geheel analoog aan de gelijkheid $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1 - x)^{-1}$ voor $|x| < 1$. Dus geldt

$$\mathbf{L}_{G,[b]}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_{G,[b]}^k \mathbf{D}_{[b]}^{-1}.$$

We zullen nu een interpretatie aan de som in het rechterlid geven.

Door weglaten van de rij en kolom van b , nemen we de surfer slechts waar zolang hij nog niet in b geweest. Dit komt erop naer dat de surfer doorsurft tot hij b bereikt heeft. De interpretatie van het element $\mathbf{P}_G^k(i, j)$ is de kans dat de ophoudende random surfer na k keer surfen in knooppunt j is bij start in i . De oneindige som geeft dan precies het verwachte aantal keren dat de surfer in knooppunt j is geweest, bij start in i , alvorens in b aan te landen. Laten we dit noteren met $\tau_{[b]}(i, j)$. Noteer met $\tau(i, b)$ het verwachte aantal keren dat de surfer moet surfen om b te bereiken.

Er geldt dat

$$\tau(i, b) = \sum_{j \neq b} \tau_{[b]}(i, j). \quad (3.3)$$

Dit mag U zelf eens proberen te beargumenteren! Hieruit volgt dat

$$\mathbf{L}_{G,[b]}^{-1}(i, j) = \tau_{[b]}(i, j) \frac{1}{d(j)}, \quad i, j \neq b. \quad (3.4)$$

De volgende verrassende stelling geldt nu.

Stelling 3.4.1. $R_{i,j} = \frac{\tau(i, j) + \tau(j, i)}{\sum_{l=1}^n d(l)}$.

Een hoge weerstand betekent dus dat de surfer er lang over doet om van i naar j te komen en/of vice versa.

Alvorens deze uitspraak te bewijzen, kunnen we met behulp van vergelijkingen (3.3) en (3.4) nog iets zeggen over het effect van het toevoegen van een tak (a, b) op de effectieve weerstand met een kanstheoretisch argument.

Vervolg deelbewijs Lemma 3.3.2 Na toevoeging van de tak (a, b) , springt de surfer met grotere kans onmiddellijk van a naar b (en omgekeerd), en met kleinere kans naar een ander aangrenzend knooppunt. U zult direct geloven dat $\tau(i, b)$ hierdoor niet toeneemt, $i \neq a, b$. Immers, elke keer dat de surfer in a komt, springt hij met grotere kans bij de volgende surf naar b , en dan houdt hij op met surfen.

Opgave 3.4.1. 1. Geef een formule voor $\tau(i, b)$ in termen van de inverse $\mathbb{L}_{G, [b]}^{-1}$.

2. Gebruik de symmetrie van $\mathbb{L}_{G, [b]}^{-1}$ om een relatie af te leiden tussen $\tau_{[b]}(i, j)$ en $\tau_{[b]}(j, i)$.

3. Toon aan dat $R_{i,b}$ niet toeneemt door toevoeging van de tak (a, b) , voor $i \neq a, b$, met een random surfer argument.

Bewijs Stelling 3.4.1 Laat $i, j \in V$, $i \neq j$. Dan geldt

$$\begin{aligned} \tau(i, j) &= \sum_k \tau_{[j]}(i, k) \\ &= \sum_k \mathbb{L}_{G, [j]}^{-1}(i, k) d(k). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nu geldt voor $k \neq i$, wegens de symmetrie van de inverse,

$$R_{ik} = \mathbb{L}_{G, [j]}^{-1}(i, i) + \mathbb{L}_{G, [j]}^{-1}(k, k) - 2\mathbb{L}_{G, [j]}^{-1}(i, k),$$

zodat

$$\mathbb{L}_{G, [j]}^{-1}(i, k) = \frac{1}{2}(\mathbb{L}_{G, [j]}^{-1}(i, i) + \mathbb{L}_{G, [j]}^{-1}(k, k) - R_{ik}) = \frac{1}{2}(R_{ij} + R_{kj} - R_{ik}).$$

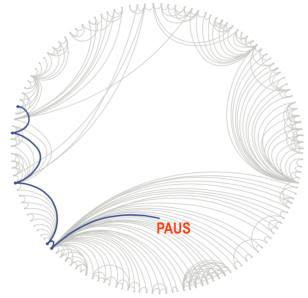
We vullen dit in vergelijking (3.5) in:

$$\tau(i, j) = d(i)R_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i, j} d(k)(R_{ij} + R_{kj} - R_{ik}).$$

Een analoge formule geldt voor $\tau(j, i)$ door de rol van j en i te verwisselen. Na optellen en gebruik van de symmetrie van de effectieve weerstand, krijgen we

$$\begin{aligned} \tau(i, j) + \tau(j, i) &= (d(i) + d(j))R_{ij} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i, j} d(k)(2R_{ij} + R_{kj} - R_{ik} + R_{ki} - R_{jk}) \\ &= \sum_k d(k)R_{ij}. \end{aligned}$$

Eerder hadden we nog de slogan over de ‘six degrees of separation’ aangeroord. Het aantal ‘degrees of separation’ in een graaf is de gemiddelde afstand \bar{d} . Met experimenten is geprobeerd dit getal te schatten via het versturen van een kettingbrief door een willekeurige groep personen aan een bekend persoon als de Paus. Hierbij stuurt iedereen die een kettingbrief ontvangt en niet de Paus is, de kettingbrief door naar een willekeurige kennis.



Het gemiddelde aantal keren dat de brief wordt doorgestuurd alvorens de Paus te bereiken, wordt als schatting van het ‘aantal degrees of separation’ in het netwerk gebruikt.

Opgave 3.4.2. *Deduceer met behulp van de analyse van de random surfer, of dit een valide experiment is: geeft de uitkomst inderdaad een schatting van het aantal ‘degrees of separation’? U kunt dit formeel doen, of gewoon een klein sociaal netwerkje bouwen en dit doorrekenen!*

3.5 Bomen en ‘Matrix-Tree’-stelling

We bespreken nog een laatste interessante interpretatie van de formule

$$R_{ab} = L_{G,[b]}^{-1}(a, a).$$

Met de regel van Cramer, kunnen we dit herschrijven als

$$R_{a,b} = \frac{\det L_{G,[a,b]}}{\det L_{G,[b]}}. \quad (3.6)$$

Hierbij staat “det” voor de determinant van de betreffende matrix.

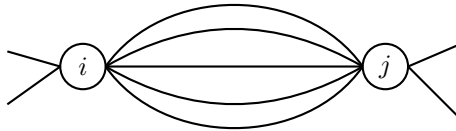
Om de alternatieve interpretatie te begrijpen hebben we het begrip ‘opspannende boom’ nodig. We hebben reeds het begrip ‘boom’ geïntroduceerd: dat is een minimaal samenhangende graaf. Gegeven een samenhangende graaf $G = (V, E)$, dan is een opspannende boom een deelgraaf die een boom is.

De volledige graaf met 3 knooppunten de K_3 heeft als opspannende bomen alle deelgrafen met 2 takken. De K_4 heeft in het totaal 16 opspannende bomen.

Opgave 3.5.1. *Bepaal alle opspannende bomen van de K_4 .*

De zogenaamde Matrix-Tree stelling specificeert het aantal opspannende bomen van een willekeurige graaf. Er zijn heel veel bewijzen van deze stelling. Het simpelste bewijs, naar mijn weten, is een inductiebewijs.

Hiervoor moeten we de aanwezigheid van parallelle takken toestaan: zij $m(i, j)$ het aantal takken tussen knooppunt i en j . Voor de graad van knooppunt i krijgen we dan $d(i) = \sum_{j \in N(i)} m(i, j)$. Merk op dat $m(i, j) = m(j, i)$.



$$m(i, j) = m(j, i) = 5$$

De Laplaciaan van G wordt dan als volgt:

$$L_G(i, j) = \begin{cases} d(i), & j = i \\ m(i, j), & j \in N(i). \end{cases}$$

Lussen worden dus niet in aanmerking genomen! We staan wel toe dat de graaf niet samenhangend is (het aantal opspannende bomen is dan 0!).

Stelling 3.5.1 (Matrix-Tree stelling). *Zij $G = (V, E)$ een graaf met mogelijk parallelle takken, zonder lussen. Dan is het aantal opspannende bomen van G gelijk aan $\det L_{G, [i]}$ $i \in V$.*

Er is hier dus weer een magische relatie tussen de Laplaciaan die ontstaat door weglaten van een knooppunt. Controle voor de K_4 geeft inderdaad antwoord 16:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 16.$$

Ik ga ervan uit dat U de regels voor het berekenen van een determinant nog kent! Een direct gevolg van de Matrix-Tree stelling dat we nodig hebben, is het volgende. De correctheid ervan blijkt gemakkelijk uit het bewijs van de deze stelling.

Gevolg 3.5.2. *Laat $(a, b) \in E$. Dan is het aantal opspannende bomen dat de tak (a, b) bevat gelijk aan $\det L_{G, [a, b]}$.*

Opgave 3.5.3. • *Beargumenteer de correctheid van bovenstaande uitspraak.*

- *Laat $T \subset G$ een deelboom van G zijn. Bedenk een formule voor het aantal opspannende bomen van G dat de deelboom T bevat.*

Alvorens de Matrix-Tree stelling te bewijzen, zullen we bespreken wat het aantal opspannende bomen te maken heeft met de effectieve weerstand. Dat is nu een rechtstreekse invuloefening geworden door vergelijking (3.6), de Matrix-Tree stelling en Gevolg 3.5.2 te combineren:

$$R_{a,b} = \frac{\text{aantal opspannende bomen van } G, \text{ dat de tak } (a,b) \text{ bevat, of, als deze er niet is, na toevoeging van een tak } (a,b)}{\text{totaal aantal opspannende bomen van } G}.$$

Dit is enigszins verrassend! Gaat U deze formule zelf eens na voor de voorbeeldgrafen! Bent U intussen al de door U bedachte formule in Opgave 3.3.1 (4) vergeten? Hier volgt zij opnieuw.

Opgave 3.5.4. *Bewijs het volgende: als er tussen knooppunten a en b maar één keten is, dan geldt dat $R_{ab} = d_{ab}$. Met opspannende bomen moet dit gemakkelijk gaan! Geef een intuïtief argument waarom altijd geldt dat $R_{ab} \leq d_{ab}$.*

Bewijs Stelling 3.5.1 We maken gebruik van volledige inductie naar het aantal knooppunten van de graaf, met daarin een geneste inductie naar het aantal takken. Laat $n = 2$. Als de graaf 0 takken heeft, dan is de Laplaciaan een 2×2 nulmatrix. Dus $\det L_{G,[i]} = 0$ voor $i = 1, 2$. Het aantal opspannende bomen is ook 0.

Stel er zijn $m(1,2)$ takken tussen knooppunten 1 en 2. Dan is

$$L_G = \begin{pmatrix} m(1,2) & -m(1,2) \\ -m(2,1) & m(2,1) \end{pmatrix}.$$

Het aantal opspannende bomen is gelijk aan $m(1,2) = m(2,1)$, en dit ook $\det L_{G,[i]}$, $i = 1, 2$.

Stel nu dat de bewering waar is voor alle grafen met minder dan n knooppunten en een willekeurig aantal takken, en voor alle grafen met n knooppunten en hooguit m takken. We zullen eerst laten zien dat de bewering ook waar is voor grafen met n knooppunten en $m + 1$ takken.

Laat G zo'n graaf zijn. In het geval dat G niet samenhangend is, mag U de correctheid van de bewering zelf beargumenteren. Stel dat G wel samenhangend is.

Kies $a \in V$ willekeurig. Na eventuele hernummering van de knooppunten mogen we aannemen dat $a = 1$. Stel $(a, b) \in E$ (er is minstens één zo'n tak wegens de samenhang). We mogen ook weer aannemen dat $b = 2$. Een opspannende boom van G kan *geeneen tak* $(1, 2)$ (geval $*$) of *wel een tak* $(1, 2)$ (geval $**$) bevatten.

In geval $*$ kan de inductieveronderstelling meteen worden toegepast. Het aantal opspannende bomen dat geen enkele tak $(1, 2)$ bevat is gelijk aan $\det L_{G^*, [1]}$, waarbij G^* de graaf is die uit G ontstaat door de $m(1, 2)$ takken tussen knooppunten 1 en 2 te verwijderen. De matrix L_{G^*} heeft de volgende vorm

$$L_{G^*} = \begin{pmatrix} d(1) - m(1, 2) & 0 & \dots \\ 0 & d(2) - m(1, 2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \boxed{L_{G, [1, 2]}} \end{pmatrix}.$$

In geval $**$ contraheren we de twee knooppunten 1 en 2 tot 1 knooppunt, \bar{v} zeg. We construeren een nieuwe graaf $G^{**} = (V^{**}, E^{**})$ met $V^{**} = \{v^{**}, 3, \dots, n\}$ en takken

$$(i, j) \in E^{**} \Leftrightarrow \begin{cases} (i, j) \in E, & i, j \in \{3, \dots, n\} \\ (i, 2) \in E, & j = v^{**}, i \in \{3, \dots, n\} \\ (i, 1) \in E & j = v^{**}, i \in \{3, \dots, n\} \end{cases}$$

Gaat U na dat met elke opspannende boom van G^{**} $m(1, 2)$ opspannende bomen van G corresponderen. Het aantal opspannende bomen van G^{**} is per inductieveronderstelling gelijk aan $\det L_{G^{**}, [v^{**}]}$, waarbij

$$L_{G^{**}} = \begin{pmatrix} d(1) + d(2) - 2m(1, 2) & -m(1, 3) - m(2, 3) & \dots \\ -m(1, 3) - m(2, 3) & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \boxed{L_{G, [1, 2]}} \end{pmatrix}$$

Nu geldt dat het aantal opspannende bomen van de graaf G gelijk is aan

$$\begin{aligned} \text{aantal} &= m(1, 2) \cdot \det L_{G^{**}, [v^{**}]} + \det L_{G^*, [1]} \\ &= m(1, 2) \det L_{G, [1, 2]} + \det \begin{pmatrix} d(2) - m(1, 2) & \dots \\ \vdots & \boxed{L_{G, [1, 2]}} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} d(2) & \dots \\ \vdots & \boxed{L_{G, [1, 2]}} \end{pmatrix} = \det L_{G, [1]}. \end{aligned}$$

Dit bewijst de correctheid van de uitspraak voor alle grafen met hooguit n knooppunten. De inductiestap voor grafen met $n + 1$ knooppunten volgt analoog: zolang er geen samenhang is, is de uitspraak trivialiter waar. Met inductie naar het aantal takken volgt het gestelde. \square

Opmerking In de laatste twee paragrafen zijn we verder niet ingegaan op generalisaties naar andere ‘weerstand’ op de takken. Deze generalisaties zijn op analoge wijze af te leiden, als U al in enkele opgaven hebt moeten doen. In plaats van werken met de Laplaciaan, moet U de gewogen Laplaciaan gebruiken.

Natuurlijk is een aantal belangrijke vragen onbesproken gebleven: U kunt nu berekenen of het Amsterdamse metronetwerk storingsgevoeliger is dan het Londense. Nou en...?

We kunnen inzicht krijgen in wat een goed gestructureerd netwerk is. Maar uiteindelijk gaat het (wat mij betreft) om het doen van optimalisaties: tussen welke stations levert het aanleggen van een extra lijn een maximale stijging van de robuustheid van het netwerk (gegeven dat ik budget heb voor één lijn). Hierbij zouden allerhande factoren betrokken kunnen worden: de belasting van de verschillende wegtrajecten, de lengtes, etc.

De webgraaf is een gerichte graaf. Voor gerichte grafen is een analoge theorie nog niet bedacht. Omdat niet alle wegen twee-richtingsverkeer toestaan, is het van belang om ook voor gerichte grafen een goede robuustheidsmaat te bedenken. Ook daaraan valt nog het nodige te onderzoeken!

3.6 Literatuur

Niet alle bewijzen staan in de literatuur. De auteur vindt het altijd een sport om te proberen bewijzen af te leiden binnen het kader van de behandelde theorie. Dat lukt niet altijd, ook hier zijn nog enkele gaten over gebleven! Die zou U zelf kunnen proberen te dichtten!

Hopelijk hebt U er nog enig plezier in om hier zelf verder ver na te denken, één Uwer leerlingen een profielwerkstuk hierover aan te doen, of in Wiskunde D te behandelen. Er zijn genoeg grappige toepassingen van technieken uit de Lineaire Algebra. Uw vragen zijn welkom!

Wat betreft literatuur: [1] is een masterscriptie met een overzicht van een aantal robuustheidsmaten, en een evaluatie hiervan. Deze is onder mijn begeleiding geschreven. U kunt hierin ook een literatuuroverzicht vinden.

De karakterisatie van de effectieve weerstand via de inverse $L_{G,[b]}$ is betrekkelijk recent, deze staat in [3]. Het elegante bewijs van de Matrix-Tree stelling kunt U vinden in [4].

Bibliografie

- [1] W. Ellens. Effective Resistance, and other graph measures for network robustness, 2011. Master thesis, University of Leiden, Url <http://math.leidenuiv.nl/nl/theses/239/>.
- [2] M. Girvan and M.E.J. Newman. Community structure in social and biological networks. *PNAS*, 99(12):7821–7826, 2002.
- [3] A. Gosh, S. Boyd, and A. Saberi. Minimizing effective resistance of a graph. *SIAM Review*, 50:37–66, 2006.
- [4] M. Lewin. A generalization of the Matrix-Tree theorem. *Math. Z.*, 181:55–70, 1982.

4 Van de predikant Bayes naar Bayesiaanse netwerken

Linda van der Gaag

Voorwoord

Elke hedendaagse wiskundige kent wel het begrip voorwaardelijke kans en heeft wel eens de *regel van Bayes* afgeleid. Het is eigenlijk een heel eenvoudig regeltje, dat in de praktijk handig is om kansen ‘om te draaien’. Het is nauwelijks voor te stellen dat de gedachte achter de regel ruim twee eeuwen lang uiterst controversieel is geweest. Hoewel de controverse nog niet helemaal is verdwenen, omarmen inmiddels toch velen het Bayesiaanse gedachtengoed. Met name door de opkomst van de *Bayesiaanse netwerken* in de jaren '90 van de vorige eeuw heeft het gebruik van de regel een grote vlucht genomen. Deze netwerken, en hun bijbehorende rekenmethoden voor de computer, hebben toepassingen voor complexe problemen met vele tientallen toevalsvariabelen praktisch mogelijk gemaakt. Kortom, het zo eenvoudige regeltje heeft ooit een ware revolutie in de kansrekening op gang gebracht, waarvan heden ten dage de vruchten worden geplukt.

4.1 De regel van Bayes en zijn controverse

Tegen de tijd dat de Engelse wiskundige en predikant Thomas Bayes (ca. 1702–1761) geïntrigeerd raakte door de notie van toeval, was deze notie al geruime tijd onderwerp van discussie. Enerzijds was er het begrip *kans*, dat de relatieve frequentie van specifieke uitkomsten van herhaalde worpen met dobbelstenen of munten beschreef; anderzijds was er het begrip *waarschijnlijkheid*, dat werd gebruikt om de kracht van onzekere overtuigingen uit te drukken. Het verschil tussen de twee begrippen laat zich illustreren aan de hand van een eenvoudig kansspel: over de uitkomst van een eenmalige worp met een gegeven munt is de uitspraak

“De kans op de uitkomst *kop* bij een worp met de munt is 0.5; immers, van 5000 eerdere worpen met de munt resulteerden er 2500 in *kop*.”

een kansuitspraak, terwijl de uitspraak

“Op grond van zijn ruime ervaring schat een bekende gokker de kans op de uitkomst *kop* bij een eenmalige worp in als 0.5.”

een waarschijnlijkheidsuitspraak is. De wiskunde hield zich eigenlijk alleen bezig met het begrip kans in kansspelen: gegeven een goed gedefinieerd kansspel, bijvoorbeeld vijf opeenvolgende worpen met een gegeven dobbelsteen, probeerde men een uitdrukking te vinden voor de kans op een bepaalde uitkomst, bijvoorbeeld een rij van vijf zessen. Het begrip waarschijnlijkheid was meer voorbehouden aan filosofen en juristen.

Thomas Bayes verbond de begrippen kans en waarschijnlijkheid met elkaar door de volgende gedachte: als de opzet van een kansspel aangeeft wat de kans op een bepaalde uitkomst is, dan moet een gegeven uitkomst ook iets vertellen over de opzet van het spel dat de uitkomsten levert. Bij een uitkomst van vijf opeenvolgende zessen in het kansspel van vijf worpen met een dobbelsteen, ga je immers denken dat een opzet met een gemanipuleerde dobbelsteen een stuk waarschijnlijker is dan een opzet met een eerlijke steen. Het moet dus mogelijk zijn om de kans dat de dobbelsteen gemanipuleerd is te bepalen, gegeven de vijf zessen op een rij. Bij het uitwerken van zijn gedachte ging Bayes uit van een ruwe inschatting voor de gezochte kans, van een waarschijnlijkheid dus. En vervolgens bedacht hij een manier om aan de hand van een daarwerkelijk gevonden uitkomst de inschatting te verbeteren. De ‘omkeer’-gedachte voor de regel van Bayes was ontstaan ! Neem de toevalsvariabele A voor de mogelijke opzet van een kansspel en de toevalsvariabele B voor de mogelijke uitkomsten van het spel, en neem verder $\Pr(A)$ als een inschatting van de kansverdeling over A en $\Pr(B)$ als de verdeling over B . Met $\Pr(B | A)$ de kansverdeling over de mogelijke uitkomsten per spelopzet, geldt nu immers dat

$$\Pr(A | B) = \frac{\Pr(B | A)}{\Pr(B)} \cdot \Pr(A)$$

Bayes heeft zijn baanbrekende gedachtengoed nooit zelf gepubliceerd. Na zijn dood vond een vriend zijn aantekeningen en heeft deze laten publiceren onder de titel *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances* (1763). Hoewel het gedachtengoed van Bayes daarmee openbaar was, schonk niemand er veel aandacht aan. De regel van Bayes zou zelfs in de vergetelheid zijn geraakt als niet de Franse wiskundige en astronoom



Figuur 4.1: Thomas Bayes (links) en Pierre-Simon Laplace (rechts), de grondleggers van het Bayesiaanse gedachtengoed.

Pierre-Simon Laplace (1749–1827) zo'n vijftig jaar later, in *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), de ideeën verder had uitgewerkt tot de regel zoals we 'm nu kennen en toepassen. Misschien moeten we dus niet zozeer spreken van de regel van Bayes, maar van de Bayes-Laplace regel.

Bayes' gedachtengoed is door de eeuwen heen uiterst controversieel geweest. Met name de vermeende circulariteit en de aanname van een beginwaarschijnlijkheid voedden de controverse: om de kans op de juistheid van een hypothese uit te rekenen moest eerst een inschatting van die kans worden aangenomen. Wiskundigen vonden dat zoiets vaags als een inschatting, een gok, niet thuishoorde in de wiskunde: de wiskunde deed immers geen onverantwoorde aannames en was neutraal. De term *Bayesiaans* werd synoniem met onbetamelijke wiskunde! Het was dus niet de door Laplace geformuleerde regel die onder vuur lag; de regel is immers wiskundig correct. Nee, het was de verbinding van het wiskundig zuivere begrip kans met het subjectieve begrip waarschijnlijkheid die de wiskundigen in het verkeerde keelgat schoot.

In de loop der jaren werd steeds duidelijker dat met de Bayesiaanse gedachte problemen konden worden aangepakt die niet als herhaalbaar experiment konden worden gezien. Een bekend voorbeeld is het breken van de Enigma code in de Tweede Wereldoorlog: Alan Turing gebruikte het Bayesiaanse gedachtengoed om de berichtenversleuteling van de Duitsers te kraken en beïnvloedde zo de wereldgeschiedenis. Mede als gevolg van dit wapenfeit en van vergelijkbare successen begon het Bayesianisme vanaf de jaren '50 van de vorige eeuw zijn stigma te verliezen. De term *Bayesiaans*

wordt tegenwoordig gebruikt voor alle methoden en technieken die de notie van kans beschouwen als een plausibele inschatting op grond van ervaring of partiële informatie. Het is niet helemaal duidelijk of Bayes zelf wel had kunnen meegaan in deze heel brede interpretatie van zijn gedachtengoed.

4.2 Kansberekeningen en schaalbaarheid

Een ieder die wel eens met kansen heeft gerekend, zal hebben ondervonden dat de berekeningen snel uit de hand lopen naarmate het aantal toevalsvariabelen toeneemt. Neem bijvoorbeeld een probleem dat met 20 variabelen wordt beschreven, die elk twee mogelijke waarden hebben. Dat zijn niet eens zo heel veel variabelen en waarden, maar het eenvoudigweg opschrijven van de kansen op alle mogelijke waardecombinaties vergt al ruim een miljoen kansuitspraken. Zelfs met de snelste computers en met toegang tot de *cloud*, is het opslaan van en het rekenen met gezamenlijke kansverdelingen over grotere aantallen variabelen niet praktisch doenbaar.

Een beproefde manier om toch met een verdeling over een groot aantal toevalsvariabelen te kunnen rekenen, is te veronderstellen dat de variabelen allemaal onderling onafhankelijk zijn. Immers, als twee toevalsvariabelen A en B onafhankelijk van elkaar zijn, is hun gezamenlijke kansverdeling te schrijven als het product van hun afzonderlijke verdelingen:

$$\Pr(A, B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

Op z'n Bayesiaans geformuleerd betekent de onafhankelijkheid van A en B dat informatie over B helemaal niks zegt over A :

$$\Pr(A | B) = \Pr(A)$$

Het opschrijven van de gezamenlijke kansverdeling voor het probleem met de 20 toevalsvariabelen vergt nu slechts enkele tientallen kansuitspraken. Zo'n algemene veronderstelling van onafhankelijkheid doet wonderen voor het opslaan van en rekenen met verdelingen over grote aantallen variabelen, maar brengt ook flinke risico's met zich mee. Immers, als de variabelen in de werkelijkheid *niet* onafhankelijk van elkaar zijn en we doen in de berekeningen alsof ze dat *wel* zijn, dan kunnen onjuiste uitkomstkansen resulteren, met mogelijk onjuiste conclusies als gevolg. Zo'n algemene veronderstelling van onafhankelijkheid is dus zeker niet altijd een acceptabele manier om het rekenen met gezamenlijke verdelingen doenbaar te maken.

Met de opkomst van de Bayesiaanse netwerken in de jaren '90 van de vorige eeuw kwam een nieuwe manier voor het opslaan van en rekenen met

gezamenlijke kansverdelingen in zwang. Deze netwerken hebben met de bovenbesproken manier gemeen dat ze ook gebruik maken van onafhankelijkheden tussen de toevalsvariabelen om de berekeningen binnen de perken te houden. In plaats van een algemene veronderstelling van onafhankelijkheid te doen, gebruiken ze echter de daadwerkelijke onafhankelijkheden tussen de variabelen. En voor het rekenen met een gezamenlijke kansverdeling gebruiken Bayesiaanse netwerken natuurlijk de regel van Bayes !

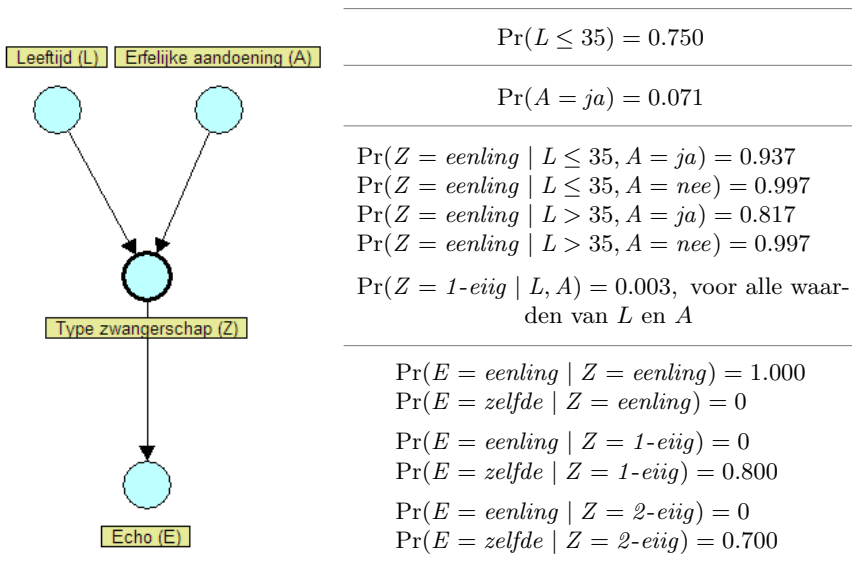
4.3 Bayesiaanse netwerken

Een *Bayesiaans netwerk* beschrijft een gezamenlijke kansverdeling over een aantal toevalsvariabelen, en bestaat daartoe uit twee delen: het ene deel beschrijft de (on)afhankelijkheden tussen de variabelen en het andere deel geeft de bijbehorende kansinformatie. De variabelen en hun onderlinge (on)afhankelijkheden worden beschreven in een structuur van knopen en pijlen, met de volgende betekenis:

- elke knoop staat voor een toevalsvariabele;
- het samenspel van pijlen beschrijft de (on)afhankelijkheden tussen de variabelen.

Figuur 4.2 toont zo'n netwerkstructuur. De structuur bevat vier toevalsvariabelen die allerlei (sterk vereenvoudigde) informatie over tweeling-zwangerschappen beschrijven voor een kraamkliniek. De variabelen *Leeftijd* (L) en *Erfelijke aanleg* (A) beschrijven factoren die het ontstaan van tweelingen in een zwangerschap beïnvloeden; de variabele *Type zwangerschap* (Z) geeft aan of zich een eenling, een één-eiige tweeling of een twee-eiige tweeling aan het ontwikkelen is, en de variabele *Echo* (E) beschrijft wat op de echo te zien is. De netwerkstructuur geeft door middel van een pijl aan dat de leeftijd van een (aanstaande) moeder van invloed is op het ontstaan van een tweeling. Omdat in het algemeen verondersteld wordt dat de leeftijd van de vrouw geen *directe* invloed heeft op de uitkomst van de echo, is in de netwerkstructuur geen pijl aanwezig tussen de variabelen *Leeftijd* en *Echo*. Er is wel een indirect verband te zien: de leeftijd van de vrouw beïnvloedt het type zwangerschap, hetgeen dan weer van invloed is op wat er uiteindelijk op de echo is te zien. De betekenis van dit indirecte verband is dat het resultaat van de echo onafhankelijk is van de leeftijd van de vrouw als het type van de zwangerschap bekend is, ofwel:

$$\Pr(E | L, Z) = \Pr(E | Z)$$



Figuur 4.2: Een voorbeeld van een Bayesiaans netwerk, met de netwerkstructuur (links) en de bijbehorende kans tabel (rechts).

voor alle mogelijke waarden van de drie variabelen.

De structuur van een Bayesiaans netwerk beschrijft dan wel de toevalsvariabelen en hun onderlinge (on)afhankelijkheden, maar definieert daarmee nog geen gezamenlijke kansverdeling over de variabelen: de sterkten van de afhankelijkheden ontbreken immers nog. Deze numerieke informatie is vastgelegd in het tweede deel van het netwerk, dat de vorm heeft van een tabel met kansverdelingen. Deze tabel bevat voor elke toevalsvariabele de voorwaardelijke verdelingen gegeven alle mogelijke waardecombinaties van zijn directe voorgangers in de netwerkstructuur. Voor de variabele die het type van de zwangerschap beschrijft bijvoorbeeld, bevat de tabel vier verdelingen: één voor elke combinatie van waarden van de twee variabelen *Leeftijd* en *Erfelijke aanleg*. De tabel die hoort bij de netwerkstructuur voor de kraamkliniek is rechts in Figuur 4.2 weergegeven (merk op dat niet alle kansen expliciet in de tabel zijn opgenomen: de ontbrekende kansen zijn echter volledig bepaald door de eigenschap dat de kansen binnen een

verdeling optellen tot 1, en zijn dus eenvoudig af te leiden).

De structuur en de tabel met kansverdelingen van een Bayesiaans netwerk geven tesamen een volledige beschrijving van een gezamenlijke kansverdeling over de toevalsvariabelen. De onafhankelijkheden tussen de variabelen die in de netwerkstructuur zijn weergegeven, zorgen ervoor dat de gezamenlijke verdeling te schrijven is als een product van losse factoren. Zo is de kansverdeling van het netwerk van Figuur 4.2 te schrijven als:

$$\Pr(L, A, Z, E) = \Pr(L) \cdot \Pr(A) \cdot \Pr(Z | L, A) \cdot \Pr(E | Z)$$

De losse factoren in zo'n product corresponderen altijd met verdelingen uit de kanstabel van het netwerk. Uit een Bayesiaans netwerk kan nu in principe elke willekeurige kans over zijn toevalsvariabelen worden berekend. Neem in het kraamklinieknetwerk bijvoorbeeld de kans dat twee embryo's van verschillend geslacht zichtbaar zijn op de echo van een zwangere vrouw van boven de 35 met een erfelijke aanleg voor tweeling-zwangerschappen. Deze kans wordt als volgt berekend:

$$\begin{aligned} \Pr(E = \textit{verschillend} | L > 35, A = ja) &= \\ &= \sum_Z \Pr(E = \textit{verschillend} | Z) \cdot \Pr(Z | L > 35, A = ja) = \\ &= 0 \cdot 0.817 + 0.200 \cdot 0.003 + 0.300 \cdot 0.18 = 0.055 \end{aligned}$$

In deze berekening is de productvorm van de gezamenlijke kansverdeling gebruikt in combinatie met standaard rekenregels van de kansrekening. Neem verder de kans dat een zwangerschap één-eiig is gegeven dat de echo twee embryo's van hetzelfde geslacht laat zien. Deze kans wordt op de volgende manier berekend:

$$\begin{aligned} \Pr(Z = 1\text{-eiig} | E = \textit{zelfde}) &= \\ &= \frac{\Pr(E = \textit{zelfde} | Z = 1\text{-eiig}) \cdot \Pr(Z = 1\text{-eiig})}{\Pr(E = \textit{zelfde})} = 0.349 \end{aligned}$$

waarin $\Pr(Z = 1\text{-eiig}) = 0.003$ and $\Pr(E = zelfde) = 0.007$. Ook nu zijn de productvorm van de gezamenlijke verdeling en standaard rekenregels van de kansrekening gebruikt, en natuurlijk de regel van Bayes !

Hoewel het kraamkliniekvoorbeeld heel klein is, laat het al wel iets van de kracht van Bayesiaanse netwerken zien. Door de expliciete weergave van de onafhankelijkheden tussen de variabelen kan hun gezamenlijke kansverdeling worden beschreven in termen van voorwaardelijke verdelingen per variabele, in lokale termen dus. De vier variabelen van het netwerk hebben 36 mogelijke waardecombinaties, maar hun gezamenlijke verdeling wordt met slechts 22 kansen beschreven. Voor een kansverdeling over 20 toevalsvariabelen met elk twee mogelijke waarden, zijn er zo'n miljoen waardecombinaties. Als de (on)afhankelijkheden tussen de variabelen kunnen worden beschreven in een structuur waarin de variabelen niet meer dan drie directe voorgangers hebben, dan bevat de bijbehorende tabel maximaal 160 kansen. Met de beschrijving van de (on)afhankelijkheden tussen de variabelen kan dus een flinke reductie worden bereikt in de opslag van de verdeling, zonder dat een groot risico op fouten ontstaat zoals met een algemene veronderstelling van onafhankelijkheid.

Het voordeel van de compacte beschrijving van de gezamenlijke kansverdeling van een Bayesiaanse netwerk ligt niet alleen in de benodigde opslagruimte, maar vooral in de efficiëntie van berekeningen die deze mogelijk maakt. Voor het kraamkliniekn netwerk zijn twee berekeningen helemaal uitgeschreven om te laten zien hoe in principe elke gewenste kans uit een netwerk is te bepalen. Voor de praktische toepassing van Bayesiaanse netwerken zijn geavanceerde computer-algoritmen ontwikkeld waarmee heel efficiënt specifieke kansen kunnen worden uitgerekend. Deze algoritmen benutten de netwerkstructuur als rekenarchitectuur om berekeningen zo lokaal mogelijk te houden. De knopen worden daarbij gebruikt als mini-processoren die elkaar lokale informatie over de kansverdeling sturen en binnenkomende informatie van hun buurknopen verwerken. Zo kan gerekend worden van oorzaak naar gevolg, en van gevolg naar oorzaak zoals het Thomas Bayes voor ogen stond, en zijn ook vele mengvormen mogelijk.

4.4 Thomas Bayes ruim twee eeuwen later

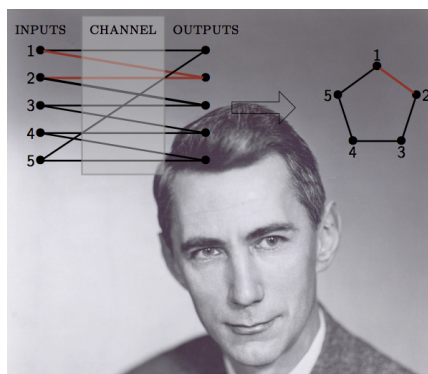
Sinds de Engelse wiskundige en predikant Thomas Bayes geïntrigeerd raakte door de notie van toeval is er veel veranderd, en niet alleen in de kansrekening. De wetenschap is ingewikkelder geworden, met name door de steeds ingewikkelder wordende context waarin zij zich beweegt. Het erfgoed van Bayes reikt methoden aan om eerder ontwikkelde wetenschappelijke kennis te verweven in het moderne onderzoek en zo de wereld om het onderzoek heen mee te nemen. Tegenwoordig zien we dan ook toepassingen van het Bayesiaanse gedachtengoed in de geneeskunde, in de ecologie, de geologie, genetica, astrofysica, archeologie, psychonomie, en in nog veel meer disciplines. Gewoon omdat het werkt !

5 Grafentheorie en communicatie

Jop Briët

Voorwoord

Claude Shannon, vader van de moderne informatietheorie, zette rondom 1950 wiskundige modellen uiteen waarmee communicatie over kanalen met ruis formeel bestudeerd kan worden [Sha48]. Hij liet onder andere zien dat het extreme model waarin berichten altijd perfect moeten aankomen volledig gekarakteriseerd wordt door eigenschappen van simpele grafen [Sha56]. Zo hoort bij ieder kanaal een graaf waarvan de ‘Shan-



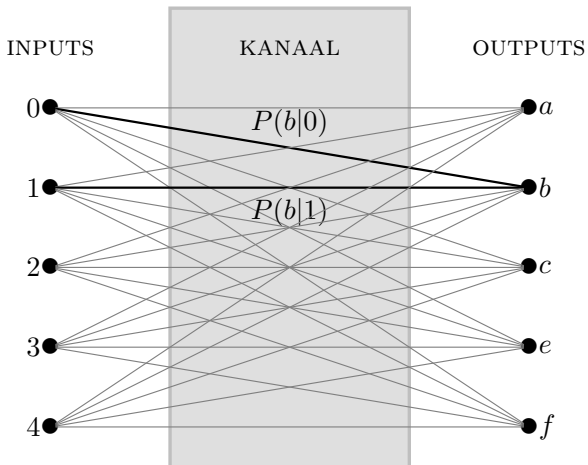
non capaciteit’ gelijk is aan de maximale communicatiesnelheid die behaald kan worden door middel van codes die berichten moeten beschermen tegen ruis. Het aantal gevolgen dat deze observatie heeft gehad voor de ontwikkeling van de grafentheorie is moeilijk te overschatten.

Een belangrijke tegenhanger van communicatie onder ruis is *bruncodering*, waarin twee gescheiden partijen gebruik proberen te maken van bestaande patronen in de informatie waarover ze beschikken om zo efficiënt mogelijk informatie uit te wisselen. Analoog aan Shannons observatie merkte Witsenhausen op dat ook dit probleem volledig bestudeerd kan worden aan de hand van eigenschappen van grafen [Wit76].

Het doel van deze tekst is om deze verbanden bloot te leggen en de relevante graafparameters en -concepten te bestuderen. We dekken slechts een minuscule deel van de reusachtige hoeveelheid literatuur over dit onderwerp (“zero-error information theory”) en verwijzen naar Körner en Orlicsky [KO98] voor een uitgebreid overzicht en naar Lubetzky [Lub07] voor meer recente resultaten.

5.1 Kanaalcodering

Een discreet communicatiekanaal met ruis wordt gemodelleerd als een drietal $\mathcal{N} = (S, R, P)$ bestaande uit een eindige verzameling *inputs* S , een eindige verzameling *outputs* R en een kansverdeling $P(\cdot|s)$ over de outputverzameling R voor elke input $s \in S$; zie Figuur 5.1. Het ruismodel dat hiermee vertegenwoordigd wordt dicteert dat als een verzender input $s \in S$ door het kanaal \mathcal{N} stuurt, de ontvanger het signaal $r \in R$ ontvangt met kans $P(r|s)$. We zullen aannemen dat kanalen *geheugenloos* zijn, wat wil zeggen dat als de verzender opeenvolgend inputs s en t (in S) verstuurt, de kans dat de ontvanger respectievelijk signalen q en r (in R) ontvangt gegeven is door het product $P(q|s)P(r|t)$.



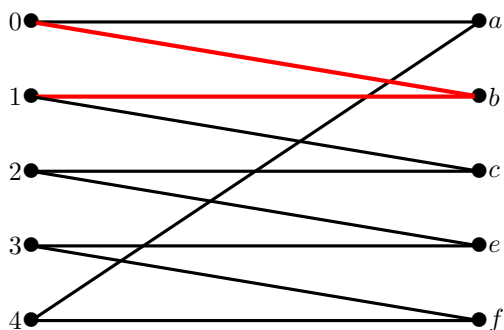
Figuur 5.1: Een discreet kanaal met 5 inputs en 5 outputs. De kans op output b na input 0 of 1 is respectievelijk $P(b|0)$ of $P(b|1)$.

Ruisloos communiceren. Shannon vroeg hoe efficiënt er gecommuniceerd kan worden als de kans op error, misinterpretatie van het verzonden bericht, nul moet zijn. Dit is onmogelijk als de transitiekansen $P(r|s)$ strikt groter zijn dan nul voor elke $s \in S$ en $r \in R$, aangezien de ontvanger dan nooit zeker kan weten wat het oorspronkelijke bericht was. Om te zien wanneer er wel iets te halen valt introduceren we de hoofdrolspeler van deze tekst: de *graaf*.

Definitie 5.1.1 (Graf). Een graaf is een tweetal $G = (V, E)$ bestaande uit een eindige verzameling V , waarvan de elementen knopen genoemd worden, en een verzameling E bestaande uit ongeordende paren $u, v \in V$, waarvan de elementen kanten genoemd worden. Kanten zullen hier uitsluitend bestaan uit twee verschillende knopen. Voor een kant schrijven we $\{u, v\} \in E$.

Definitie 5.1.2 (Bipartiete graaf). Een graaf $G = (V, E)$ is bipartiet als de knopenverzameling V bestaat uit een disjuncte vereniging $V = L \cup R$ en als E uitsluitend kanten van de vorm $\{u, v\}$ met $u \in L$ en $v \in R$ bevat.

Bekijk nu de versie van Figuur 5.1 waarin input s en output r alleen met elkaar verbonden zijn als $P(r|s) > 0$.

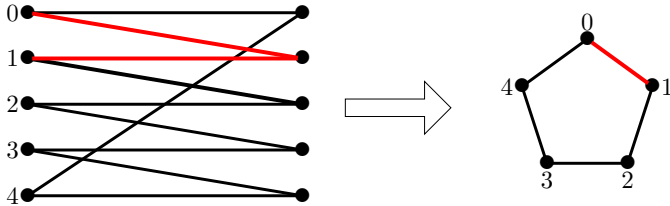


Figuur 5.2: De bipartiete graaf van het kanaal uit Figuur 5.1.

Dit resulteert in een bipartiete graaf zoals bijvoorbeeld die in Figuur 5.2. Als de ontvanger het signaal b ontvangt dan kan die afkomstig zijn geweest van beide inputs 0 en 1. In eerste instantie lijkt het er dus misschien op alsof zelfs in dit geval niet perfect gecommuniceerd kan worden. Dit kan echter wel als de partijen van tevoren afspreken dat slechts een subset van de inputs gebruikt wordt. Bijvoorbeeld, als de verzender alleen inputs 0 en 2 gebruikt, dan zal de ontvanger nooit in verwarring zijn omdat er geen output is die van beide deze inputs afkomstig kan zijn. Dit laat zien dat elke keer dat dit kanaal gebruikt wordt er minstens één bit perfect verstuurd kan worden.

Shannon realiseerde zich dat het aantal berichten dat perfect verstuurd kan worden precies overeenkomt met een bekende graafparameter van de volgende zogeheten *verwarringsgraaf*. De knopen van de verwarrings-

graaf $G = (V, E)$ zijn de inputs van het kanaal, dus $V = S$. Twee knopen $u, v \in V$ vormen een kant als er een $r \in R$ is zodat beide $P(r|v) > 0$ en $P(r|u) > 0$ geldt (zie Figuur 5.3). Met andere woorden, de kanten zijn precies de paren inputs die niet met zekerheid van elkaar onderscheiden kunnen worden.



Figuur 5.3: Van een communicatiekanaal naar zijn verwarringsgraaf.

De relevante graafparameter is het *onafhankelijkheidsgetal* $\alpha(G)$, gedefinieerd als de grootte van de grootste verzameling knopen die onderling geen kanten vormen, ofwel een onafhankelijke verzameling vormen. Zo komen we op de eerste stelling.

Propositie 5.1.3. *Voor een kanaal met verwarringsgraaf G is $\alpha(G)$ het maximale aantal berichten dat zonder ruis gecommuniceerd kan worden.*

Het voorbeeld uit Figuur 5.3 geeft als verwarringsgraaf de 5-cykel C_5 , waarvoor $\alpha(C_5) = 2$ geldt.

Opgave 5.1.4. *Zij $\mathcal{N} = (S, R, P)$ het kanaal met*

$$S = R = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

en waarvoor $P(x|y) = 1/4$ voor alle paren $x \in R, y \in S$ die hetzelfde zijn of in precies één coördinaat verschillen en $P(x|y) = 0$ voor alle andere paren. Wat is de verwarringsgraaf van \mathcal{N} en wat is diens onafhankelijkheidsgetal?

Een algemene vorm van Opgave 5.1.4 vraagt naar het onafhankelijkheidsgetal voor het kanaal waar voor twee natuurlijk getallen d, n zodat $1 \leq d \leq n$, de in- en outputverzamelingen bestaan uit alle reeksen van n bits, dat wil zeggen $S = R = \{0, 1\}^n$, waar $P(x|y) > 0$ voor alle paren x, y die verschillen in hooguit d coördinaten en waar $P(x|y) = 0$ voor alle overgebleven paren. Het antwoord voor $n = 17$ en $d = 6$ is onbekend!

De Shannon capaciteit. In het *kanaalcodering probleem* heeft de verzender een verzameling van m mogelijke berichten die ze zonder ruis naar een ontvanger moet kunnen sturen met behulp van een geheugenloos kanaal \mathcal{N} met verwarringsgraaf $G = (V, E)$. Hierboven zagen we dat als $m \leq \alpha(G)$ geldt, dit probleem opgelost kan worden door elk bericht te coderen als een unieke input van een onafhankelijke verzameling van grootte m in G . Voor elk bericht hoeft het kanaal dan maar één keer gebruikt te worden.

Wat als $m > \alpha(G)$? Een makkelijke oplossing is om de berichten te coderen als reeksen van n inputs uit een onafhankelijke verzameling van grootte $\alpha(G)$, waar de *bloklengte* n gekozen wordt zodat $\alpha(G)^n \geq m$. Elke reeks zal ontvangen worden als een unieke reeks outputs, waardoor de ontvanger de verzender luid en duidelijk kan verstaan. Van het voorbeeld uit Figuur 5.3 zien we bijvoorbeeld dat als $m = 5$, we met bloklengte $n = 3$ toekunnen; er kunnen dan 8 mogelijke berichten verstuurd worden.

Maar dit kan efficiënter! De vraag die we moeten stellen is:

Wanneer kunnen twee inputreeksen $u_1, \dots, u_n \in S$ en $v_1, \dots, v_n \in S$ met zekerheid onderscheiden worden?

Als deze reeksen verstuurd worden ontvangt de ontvanger respectievelijk signaalreeksen $x_1, \dots, x_n \in R$ en $y_1, \dots, y_n \in R$. Merk op dat als er een $i \in \{1, \dots, n\}$ is waarvoor u_i en v_i verschillend zijn en géén kant vormen in de verwarringsgraaf, de signalen x_i en y_i dan nooit hetzelfde zijn. Het antwoord op de vraag luidt daarom:

Als er een coördinaat $i \in \{1, \dots, n\}$ is zodat $u_i \neq v_i$ en $\{u_i, v_i\} \notin E$.

Twee reeksen kunnen dus alleen *verward* worden als voor *elke* coördinaat geldt dat $u_i = v_i$ of $\{u_i, v_i\} \in E$. Dit motiveert de introductie van de verwarringsgraaf $G^{\boxtimes n} = (V^n, E_n)$ voor inputreeksen van lengte n , wiens knopenverzameling bestaat uit het n -voudig cartesisch product van V met zichzelf en wiens kantenverzameling E_n bestaat uit de paren (u_1, \dots, u_n) , (v_1, \dots, v_n) waarvoor voor elke i geldt dat $u_i = v_i$ of $\{u_i, v_i\} \in E$.

Definitie 5.1.5 (Sterke graafproduct). *Voor twee grafen $G = (V, E)$ en $H = (W, F)$ is het sterke graafproduct $G \boxtimes H$ de graaf met het cartesisch product $V \times W$ als knopenverzameling waarin $(v, w), (v', w') \in V \times W$ een kant vormen als $v = v'$ of $\{v, v'\} \in E$ en $w = w'$ of $\{w, w'\} \in F$.*

Opgave 5.1.6. *Zij G de graaf bestaande uit één kant. Teken $G \boxtimes G$. [Hint: De graaf $G \boxtimes G$ is deze zin al afgebeeld.]*

Opgave 5.1.7. *Laat zien dat het sterke graafproduct associatief is: voor alle grafen G, H, J geldt $G \boxtimes (H \boxtimes J) = (G \boxtimes H) \boxtimes J$.*

Opgave 5.1.8. Laat zien dat $G^{\boxtimes n} = G \boxtimes G \boxtimes \cdots \boxtimes G$ (n maal).

Zo komen we op onze tweede stelling:

Propositie 5.1.9. Voor een kanaal met verwarringsgraaf G is het maximale aantal berichten dat met inputreeksen van lengte n zonder ruis verzonden kan worden gelijk aan $\alpha(G^{\boxtimes n})$.

De voorgaande discussie suggereerde al de volgende eenvoudige stelling over het gedrag van het onafhankelijkheidsgetal onder het sterke graafproduct.

Propositie 5.1.10. Zij $G = (V, E)$ en $H = (W, F)$ twee grafen. Dan geldt

$$\alpha(G \boxtimes H) \geq \alpha(G)\alpha(H).$$

Een direct bewijs volgt uit het feit dat het cartesisch product $I \times J$ van een onafhankelijke verzameling $I \subseteq V$ in G en een onafhankelijke verzameling $J \subseteq W$ in H een onafhankelijke verzameling in $G \boxtimes H$ vormt. Door Propositie 5.1.10 herhaaldelijk toe te passen met de conclusie van Opgave 5.1.8 krijgen we ook de volgende voor de hand liggende gevolgtrekking.

Propositie 5.1.11. Zij G een graaf. Dan geldt

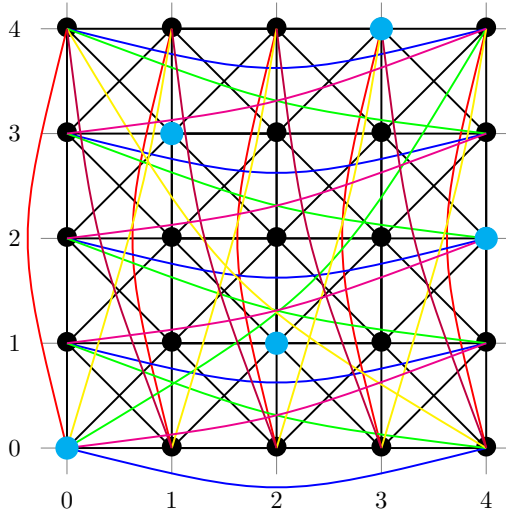
$$\alpha(G^{\boxtimes k}) \geq \alpha(G)^k.$$

De 5-cykel laat al zien dat *blokcoderen*, het coderen van berichten in goed gekozen inputreeksen, kan leiden tot efficiënter gebruik van een kanaal. Shannon merkte op dat de graaf $C_5 \boxtimes C_5$ een onafhankelijke verzameling van grootte 5 heeft: de knopen $(0, 0), (2, 1), (4, 2), (1, 3), (3, 4)$ vormen onderling geen kanten (zie Figuur 5.4). Over een kanaal met C_5 als verwarringsgraaf kunnen er gemiddeld per input dus geen één, maar minstens $\log_2(5)/2 = 1,16\dots$ bits gecommuniceerd worden.

De Shannon capaciteit van een graaf geeft de maximale communicatiesnelheid wanneer de bloklengte naar oneindig gaat.

Definitie 5.1.12 (Shannon capaciteit). De Shannon capaciteit van een graaf $G = (V, E)$ is gedefinieerd als

$$\Theta(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(G^{\boxtimes n})^{\frac{1}{n}}.$$



Figuur 5.4: $C_5 \boxtimes C_5$

Wanneer de bloklengte naar oneindig gaat kunnen er gemiddeld per input $\log \Theta(G)$ bits ruisloos verstuurd worden. Helaas is de Shannon capaciteit in het algemeen extreem lastig te bepalen. Zelfs voor de 5-cykel was dit niet eenvoudig. Gegeven dat

$$\sqrt{5} = \alpha(C_5^{\boxtimes 2})^{\frac{1}{2}} > \alpha(C_5) = 2$$

is een natuurlijke vervolgvraag of er wellicht een natuurlijk getal $n \geq 3$ bestaat zodat $\alpha(C_5^{\boxtimes n})^{\frac{1}{n}} > \sqrt{5}$. De vraag naar de exacte waarde van $\Theta(C_5)$ stelde Shannon zelf al in zijn beroemde artikel [Sha56]. Het duurde echter meer dan 20 jaar voordat Lovász [Lov79] met een ingenieus bewijs liet zien dat Shannons ondergrens van $\sqrt{5}$ niet verbeterd kan worden.

Stelling 5.1.13 (Lovász). *Voor elk natuurlijk getal n geldt*

$$\alpha(C_5^{\boxtimes n})^{1/n} \leq \sqrt{5}.$$

In het bijzonder hebben we $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$.

Helaas valt het bewijs van Lovász buiten de strekking van dit artikel, maar dankzij de elegantie ervan is het behalve in de oorspronkelijke bron ook te vinden in het boek *Proofs from THE BOOK* [AZ14, Hoofdstuk 37], vernoemd naar het geheime boek waarin volgens Paul Erdős God de perfecte

bewijzen voor wiskundige stellingen bewaart. Misschien is het verleidelijk te denken dat het bewijs van Lovász de Shannon capaciteit van alle cykels geeft. Zijn algemene resultaat voor oneven cykels luidt als volgt.

Stelling 5.1.14 (Lovász). *Voor $k \geq 3$ oneven geldt*

$$\Theta(C_k) \leq \frac{k \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)}.$$

Voor $k = 5$ geeft dit precies de bovengrens van $\sqrt{5}$. De capaciteit van de 7-cykel is echter nog steeds niet bekend! Stelling 5.1.14 en een recente berekening van [MÖ15] die de, voor de auteur, best-bekende ondergrens geeft, laten zien dat

$$3,2271 < 350^{\frac{1}{5}} \leq \alpha(C_7^{\boxtimes 5})^{\frac{1}{5}} \leq \Theta(C_7) < 3,3177.$$

De capaciteiten van k -cykels met oneven $k \geq 9$ zijn evenmin bekend. *Even* cykels zijn een ander verhaal. De reden daarvoor is dan deze grafen bipartiet zijn. Voor bipartiete grafen is de Shannon capaciteit *wel* simpel te bepalen.

Propositie 5.1.15. *Zij G een bipartite graaf. Dan geldt*

$$\Theta(G) = \alpha(G).$$

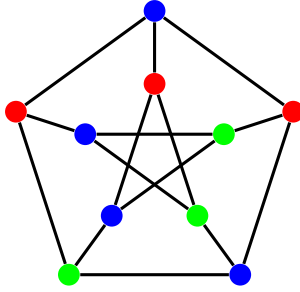
Een grotere klasse grafen waarvoor deze stelling geldt wordt gevormd door de *perfecte grafen*, waar de rest van deze sectie aan gewijd zal worden. De definitie van deze klasse is gebaseerd op de volgende drie basisconcepten.

Definitie 5.1.16 (Clique). *Een clique is een deelverzameling knopen waarvan elke twee een kant vormen. Het cliquegetal van een graaf G , genoteerd als $\omega(G)$, is het aantal knopen in een clique van maximale grootte.*

Definitie 5.1.17 (Geldige knopenkleuring). *Een geldige knopenkleuring van een graaf is een toewijzing van een kleur aan elke knoop zodanig dat elke kant tweekleurig is. Het chromatisch getal van een graaf G , genoteerd als $\chi(G)$, is het minimum aantal kleuren voor een geldige knopenkleuring.*

Merk op dat het chromatisch getal altijd minstens het cliquegetal is.

Definitie 5.1.18 (Geïnduceerde deelgraaf). *Zij $G = (V, E)$ een graaf en $S \subseteq V$ een deelverzameling. De deelgraaf geïnduceerd door S is de graaf met knopenverzameling S en wiens kantenverzameling bestaat uit de kanten in $\{u, v\} \in E$ zodanig dat $u, v \in S$.*



Figuur 5.5: De Petersen graaf heeft cliquegetal 2 en chromatisch getal 3.

De Petersen graaf in Figuur 5.5 heeft bijvoorbeeld het pentagon als geïnduceerde deelgraaf. De definitie van een perfecte graaf is nu als volgt.

Definitie 5.1.19 (Perfekte graaf). *Een graaf is perfect als voor elke geïnduceerde deelgraaf geldt dat het chromatisch getal gelijk is aan het cliquegetal.*

De Petersen graaf (Figuur 5.5) is een voorbeeld van een graaf die *niet* perfect is, omdat het cliquegetal van de graaf zelf verschilt van zijn kleurgetal. Het is niet moeilijk te zien dat bipartite grafen perfect zijn omdat ze chromatisch getal 2 hebben. Zoals hierboven al aangekondigd hebben we de volgende stelling over de Shannon capaciteit van perfecte grafen.

Stelling 5.1.20. *Zij G een perfecte graaf, dan geldt*

$$\Theta(G) = \alpha(G).$$

In het resterende deel van deze sectie zullen wij deze stelling bewijzen. Hiervoor introduceren we twee laatste graafconcepten.

Definitie 5.1.21 (Graaf complement). *Het complement van een graaf $G = (V, E)$, aangeduid als \overline{G} , heeft V als knopenverzameling en twee knopen vormen een kant dan en slechts dan als ze geen kant in G vormen.*

Definitie 5.1.22 (Disjunctieve graafproduct). *Voor grafen $G = (V, E)$ en $H = (W, F)$ is het disjunctieve graafproduct $G \vee H$ de graaf met knopenverzameling $V \times W$ waarin $(v, w), (v', w') \in V \times W$ een kant vormen als $\{v, v'\} \in E$ of $\{w, w'\} \in F$.*

Het disjunctieve graafproduct is ook associatief. We kunnen daarom machten nemen: $G^{\vee k} = G \vee G \vee \dots \vee G$ (k keer).

Het bewijs van Stelling 5.1.20 breken we op in een paar eenvoudige stukken. Eerst relateren we het onafhankelijkheidsgetal van een perfecte graaf aan het chromatisch getal van zijn complement.

Hiervoor gebruiken we de perfecte graaf stelling van Lovász (zie bijvoorbeeld [D05, Stelling 5.5.4]).

Stelling 5.1.23 (Lovász). *Zij G een perfecte graaf. Dan is \overline{G} ook perfect.*

Propositie 5.1.24. *Zij G een perfecte graaf. Dan geldt*

$$\alpha(G) = \chi(\overline{G}).$$

Voor het bewijs van deze propositie, merk op dat $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ en dat een perfecte graaf voldoet aan de eigenschap $\omega(G) = \chi(G)$.

Vervolgens beschouwen we het chromatisch getal van disjunctieve graafproducten en krijgen we een tegenhanger van Stelling 5.1.11.

Lemma 5.1.25. *Voor elke graaf G geldt*

$$\chi(G^{\vee k}) \leq \chi(G)^k.$$

Voor het bewijs nemen we een geldige kleuring van G met $c = \chi(G)$ kleuren. Associeer de kleuren met de getallen $1, \dots, c$. We “kleuren” vervolgens de graaf $G^{\vee k}$ met reeksen $(c_1, \dots, c_k) \in \{1, \dots, c\}^k$ als volgt. We kleuren de knoop $(u_1, \dots, u_k) \in V^k$ van $G^{\vee k}$ met de reeks (c_1, \dots, c_t) zodat in de kleuring van G knoop u_i kleur c_i heeft voor elke $i \in \{1, \dots, k\}$. Knopen $(u_1, \dots, u_k), (v_1, \dots, v_k) \in V^k$ vormen een kant in $G^{\vee k}$ als er een $i \in \{1, \dots, k\}$ is zodat $\{u_i, v_i\} \in E$. Maar in dat geval verschillen de kleuren van die knopen op coördinaat i en hebben we $G^{\vee k}$ dus geldig gekleurd. We hebben hooguit $c^k = \chi(G)^k$ kleuren gebruikt en daarmee is het lemma bewezen.

Het laatste ingrediënt voor het bewijs van Stelling 5.1.20 relateert het sterke graafproduct en het disjunctieve graafproduct.

Lemma 5.1.26. *Voor elke graaf G geldt*

$$\overline{G^{\boxtimes k}} = (\overline{G})^{\vee k}.$$

Voor het bewijs volgen we de definities. Twee knopen $u, v \in V^k$ vormen een kant in $\overline{G^{\boxtimes k}}$ dan en slechts dan als ze *geen* kant vormen in $G^{\boxtimes k}$. Maar

u en v vormen geen kant in $G^{\boxtimes k}$ dan en slechts dan als er een $i \in \{1, \dots, k\}$ is zodat u_i en v_i verschillen en geen kant in G vormen. De knopen u en v vormen dus een kant in $\overline{G^{\boxtimes k}}$ dan en slechts dan als er een $i \in \{1, \dots, k\}$ is zodat u_i en v_i een kant vormen in \overline{G} . We concluderen dat de kanten van $\overline{G^{\boxtimes k}}$ overeenkomen met de kanten van $(\overline{G})^{\vee k}$ en daarmee is het lemma bewezen.

Met de bovenstaande drie ingrediënten is het bewijs van Stelling 5.1.20 nu eenvoudig. Op een rijtje impliceren ze direct dat voor elke perfecte graaf G en natuurlijk getal k geldt dat

$$\alpha(G^{\boxtimes k}) \leq \chi(\overline{G^{\boxtimes k}}) = \chi((\overline{G})^{\vee k}) \leq \chi(\overline{G})^k = \alpha(G)^k.$$

We concluderen dat

$$\Theta(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(G^{\boxtimes k})^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha(G)^k)^{1/k} = \alpha(G)$$

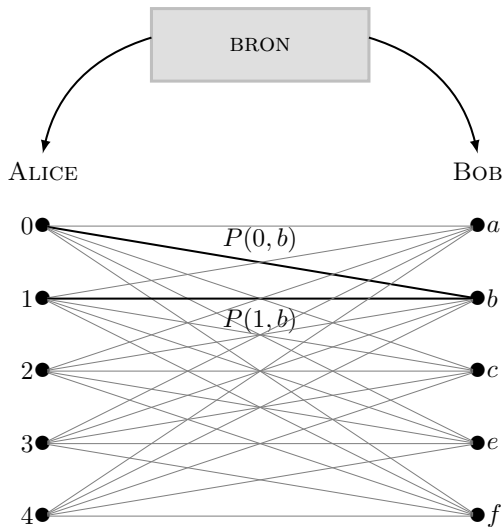
en daarmee is de stelling bewezen.

5.2 Broncodering

In het broncodering probleem krijgen twee partijen, Alice en Bob, allebei een input van een externe bron en is hun doel om met zo min mogelijk communicatie Alices input aan Bob duidelijk te maken. Alice kan hiervoor uiteraard haar hele input naar Bob sturen, maar soms kan er communicatie bespaard worden als Bobs input al wat informatie over die van Alice bevat.

Vergelijkbaar met een discreet kanaal is een *discrete bron* een drietal $\mathcal{M} = (U, W, P)$ bestaande uit een eindige inputverzameling U voor Alice, een eindige inputverzameling W voor Bob en een kansverdeling P over alle mogelijke paren in $U \times W$. Het model dicteert dat de kans dat Alice input $u \in U$ en Bob input $w \in W$ krijgt gegeven is door $P(u, w)$. Zoals voor kanalen met ruis wordt aangenomen dat de bron geheugenloos is, wat wil zeggen dat de kansverdeling P na elke instantie onveranderd blijft.

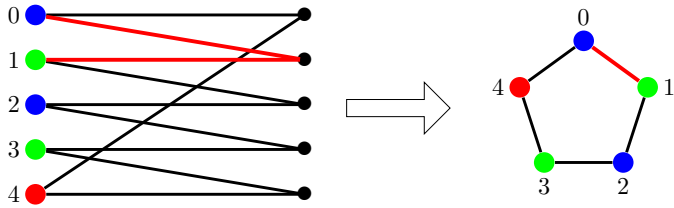
Zoals Shannon voor het kanaalcodering probleem, beschouwde Witsenhausen [Wit76] de minimale communicatie die nodig is in het geval waarin er geen fouten getolereerd kunnen worden, oftewel de maximale snelheid waarmee het probleem opgelost kan worden in het foutloze model. Als voorheen doen de waarden van de kansen $P(u, v)$ er dan niet meer toe en is het alleen van belang of ze nul zijn of niet. Voor de bron van Figuur 5.6 krijgen we zo bijvoorbeeld een graaf die er zo uitziet als die van Figuur 5.2.



Figuur 5.6: Een discrete bron met 5 mogelijke inputs voor Alice en Bob.

Het probleem van foutloze broncodering kan wederom bestudeerd worden in graaftheoretische termen. Hiervoor associëren we met een bron $\mathcal{M} = (U, W, P)$ een zogeheten *karakteristieke graaf* $G = (V, E)$ met knopenverzameling $V = U$ en waarin twee knopen $u, v \in V$ een kant vormen als er een $w \in W$ is zodat beide $P(u, w) > 0$ en $P(v, w) > 0$ gelden (zie Figuur 5.7). De gedachte achter deze graaf is dat als Bob $w \in W$ ontvangt, hij niet weet of Alices input u of v is en Alice hem dus van extra informatie moet voorzien. Met andere woorden, de kanten in de karakteristieke graaf G identificeren precies Alices inputparen die Bob niet altijd kan onderscheiden.

Het oplossen van een broncodering probleem betekent dat Alice voor elk van haar mogelijke inputs een zo kort mogelijk bericht voor Bob heeft waaruit hij haar input kan herleiden. Als we deze berichten zien als kleuren dan moet de kleuring van Alices inputverzameling er aan voldoen dat paren van inputs die door Bob mogelijk verward kunnen worden verschillende kleuren hebben. Met andere woorden, de kleuring moet een geldige kleuring van de karakteristieke graaf zijn! Andersom zien we ook dat een geldige kleuring van de karakteristieke graaf gebruikt kan worden om het broncodering probleem op te lossen. De eerste stelling voor het broncode-



Figuur 5.7: Van een bron naar z'n karakteristieke graaf.

ring probleem luidt dus:

Stelling 5.2.1. *Het oplossen van één instantie van het broncodering probleem voor een bron met karakteristieke graaf G is equivalent met het vinden van een geldige kleuring van G .*

Als gevolgtrekking zien we ook direct het volgende feit.

Propositie 5.2.2. *Het minimale aantal bits dat Alice Bob kan sturen bij het coderen voor een bron met karakteristieke graaf G is $\lceil \log_2 \chi(G) \rceil$.*

De Witsenhausen snelheid. Broncodering kan soms efficiënter gedaan worden door blokken inputreeksen samen te coderen. Hierbij wachten Alice en Bob totdat ze n paren inputs hebben ontvangen, waarna Alice haar reeks codeert in een zo kort mogelijk bericht waaruit Bob, samen met zijn inputreeks, Alices reeks kan achterhalen. Natuurlijk kan Alices bericht bestaan uit de reeks van n kleuren die ze haar inputs in de individuele instanties zou geven, zodat Bob elk van haar inputs onafhankelijk van elkaar kan achterhalen. In graaftheoretische termen zegt dit dat blokken van n inputs gecodeerd kunnen worden met $\chi(G)^n$ verschillende berichten. Maar, zoals al aangekondigd, kan dit soms efficiënter. De vraag die we moeten stellen is wanneer Bob twee inputreeksen $u_1, \dots, u_n \in V$ en $v_1, \dots, v_n \in V$ van Alice niet met zekerheid kan onderscheiden. Merk op dat dit gebeurt wanneer voor elke $i \in \{1, \dots, n\}$ geldt dat $u_i = v_i$ of $\{u_i, v_i\} \in E$, omdat als er één coördinaat i is waarvoor geen van beide dingen gelden, Bob u_i en v_i , en daarom de hele reeksen, kan onderscheiden aan de hand van zijn i 'de input. De mogelijk te verwarren paren zijn dus weer precies de kanten van de graaf $G^{\boxtimes n}$! Zo komen we bij de tweede stelling,

Stelling 5.2.3. *Het minimum aantal verschillende kleuren (codewoorden) dat Alice kan gebruiken is $\chi(G^{\boxtimes n})$.*

De volgende definitie volgt daarom als een natuurlijke tegenhanger van de Shannon capaciteit.

Definitie 5.2.4 (Witsenhausen snelheid). *De Witsenhausen snelheid van een graaf G is gedefiniëerd als*

$$R(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(G^{\boxtimes n})^{\frac{1}{n}}.$$

Als de blokengte naar oneindig gaat hoeven er gemiddeld $\lceil \log_2 R(G) \rceil$ bits per broninstantie gecommuniceerd te worden.

Hierboven gaven we al een intuïtief bewijs voor de volgende stelling over het gedrag van het chromatisch getal onder het sterke graafproduct.

Propositie 5.2.5. *Zij G een graaf. Dan geldt*

$$\chi(G^{\boxtimes n}) \leq \chi(G)^n.$$

Dat het coderen van blokken een verschil kan maken, met andere woorden, dat $\chi(G^{\boxtimes n}) < \chi(G)^n$ soms kan gelden, is weer te zien aan de hand van ons lopende voorbeeld, de 5-cykel. We weten al dat $\chi(C_5) = 3$. Witsenhausen liet zien dat strikt minder dan 9 kleuren voldoende zijn voor $C_5^{\boxtimes 2}$.

Propositie 5.2.6 (Witsenhausen). $\chi(C_5^{\boxtimes 2}) \leq 5$.

(0, 0)	(2, 1)	(4, 2)	(1, 3)	(3, 4)
(0, 1)	(2, 2)	(4, 3)	(1, 4)	(3, 0)
(0, 2)	(2, 3)	(4, 4)	(1, 0)	(3, 1)
(0, 3)	(2, 4)	(4, 0)	(1, 1)	(3, 2)
(0, 4)	(2, 0)	(4, 1)	(1, 2)	(3, 3)

Figuur 5.8: Witsenhausens kleuring van $C_5 \boxtimes C_5$.

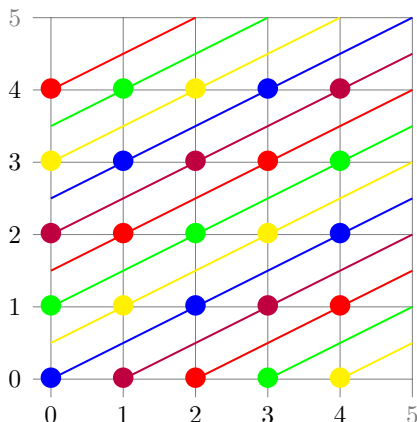
De meest expliciete manier om dit zien is door te verifiëren dat Witsenhausens kleuring (Figuur 5.8) geldig is. Merk allereerst op dat de tabel alle knopen van $C_5 \boxtimes C_5$ bevat. Merk ten tweede op dat elke rij een onafhankelijke verzameling vormt. Omdat elke onafhankelijke verzameling een eigen kleur heeft is de kleuring geldig.

Deze kleuring vond Witsenhausen niet door met veel geduld alle mogelijkheden te doorzoeken. Een vertaling van zijn elegante argument is gebaseerd op tellen modulo 5. Merk op dat twee knopen $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ van

de graaf C_5 een kant vormen als $x - y = 1 \pmod{5}$ of $x - y = 4 \pmod{5}$. Twee knopen $(x, y), (x', y') \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\}$ van de graaf $C_5 \boxtimes C_5$ vormen daarom een kant als $(x, y) - (x', y') \pmod{5}$ behoort tot de verzameling

$$(0, 1) \quad (1, 0) \quad (1, 1) \quad (0, 4) \quad (4, 0) \quad (1, 4) \quad (4, 1) \quad (4, 4).$$

Beeld de knopen van $C_5^{\boxtimes 2}$ af op een tweedimensionaal grid (Figuur 5.9).

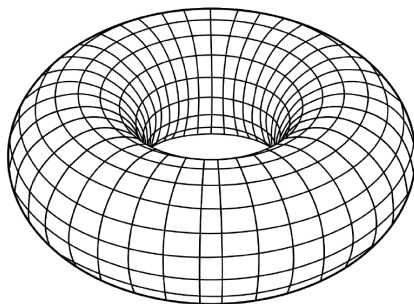


Figuur 5.9: Lijnkleuring van $C_5 \boxtimes C_5$.

Witsenhausen observeerde dat alle knopen op een lijn wiens richting niet gegeven is door één van de punten uit de rij hierboven een onafhankelijke verzameling vormen. De reden hiervoor is dat het verschil van elke twee punten op een lijn in richting (a, b) gelijk is aan een veelvoud van (a, b) . Beschouw bijvoorbeeld de lijn door de oorsprong $(0, 0)$ in richting $(2, 1)$ (de blauwe lijn in Figuur 5.9). Modulo 5 bevat deze lijn de punten $(0, 0)$, $(2, 1)$, $2(2, 1) = (4, 2)$, $3(2, 1) = (6, 3) = (1, 3) \pmod{5}$ en $4(2, 1) = (8, 4) = (3, 4) \pmod{5}$, precies de eerste rij uit Figuur 5.8. Als twee knopen geen kant vormen dan mogen we ze dezelfde kleur geven en omdat we alle knopen kunnen dekken met vijf parallelle lijnen zijn vijf kleuren dus voldoende.

Analoog aan de kanaalsetting gelden de volgende twee stellingen voor de Witsenhausensnelheid van C_5 .

Propositie 5.2.7 (Lovász). $R(C_5) = \sqrt{5}$.



Figuur 5.10: Figuur 5.9 had beter op een torus getekend kunnen worden omdat de tegenoverliggende randen aan elkaar gelijkijd zijn.

Dit volgt direct uit Stelling 5.1.13, die zei dat $\alpha(C_5^{\boxtimes n}) \leq 5^{n/2}$, en door de volgende eenvoudige observatie toe te passen op de graaf $G = C_5^{\boxtimes n}$:

Propositie 5.2.8. *Zij $G = (V, E)$ een graaf. Dan geldt*

$$\alpha(G)\chi(G) \geq |V|.$$

Waarom is dit zo? Stel we hebben een geldige kleuring van een graaf G met $c = \chi(G)$ knopen. Noem de kleuren $1, 2, \dots, c$. Voor kleur i , laat n_i het aantal knopen met kleur i zijn. Elke knoop heeft een kleur, dus het totale aantal knopen is $n_1 + n_2 + \dots + n_c = |V|$. Knopen met eenzelfde kleur moeten een onafhankelijke verzameling vormen. Daarom kan elke kleurklasse uit hooguit $\alpha(G)$ knopen bestaan. We hebben dus dat $n_i \leq \alpha(G)$ voor elke kleur i waaruit de claim volgt.

We sluiten af met een opgave die de bovenstaande twee onderwerpen met elkaar verbindt. Voor meer over dit verband, zie [NTR06].

Opgave 5.2.9 (Kanaal-broncoderen). *Alice en Bob hebben een kanaal met verwarringsgraaf $G = (V, E)$ en een bron met karakteristieke graaf $H = (W, F)$. Om het broncodering probleem op te lossen mogen Alice en Bob alleen gebruik maken van hun kanaal. Waar moeten G en H aan voldoen wil dit kunnen? [Hint: Een homomorfisme van een graaf $G' = (V', E')$ naar een graaf $H' = (W', F')$ is een afbeelding van V' op W' zodat elke kant in G' afgebeeld wordt op een kant in H' .]*

Bibliografie

- [AZ14] M. Aigner and G.M. Ziegler. *Proofs from The Book*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 2014. ISBN 978-3-662-44204-3; 978-3-662-44205-0. Including illustrations by Karl H. Hofmann.
- [D05] R. Diestel. *Graph theory*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 173. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2005.
- [KO98] J. Körner and A. Orlitsky. Zero-error information theory. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44(6):2207–2229, 1998. Information theory: 1948–1998.
- [Lov79] L. Lovász. On the Shannon capacity of a graph. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 25(1):1–7, 1979.
- [Lub07] E. Lubetzky. *Graph Powers and Related Extremal Problems*. Ph.D. thesis, Tel Aviv University, 2007.
- [MÖ15] K.A. Mathew and P.R.J. Östergård. New lower bounds for the Shannon capacity of odd cycles. *Designs, Codes and Cryptography*, pages 1–10, 2015.
- [NTR06] J. Nayak, E. Tuncel, and K. Rose. Zero-error source-channel coding with side information. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(10):4626–4629, 2006.
- [Sha48] C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 623–656, 1948.
- [Sha56] C.E. Shannon. The zero error capacity of a noisy channel. *Institute of Radio Engineers, Transactions on Information Theory*, IT-2(September):8–19, 1956.
- [Wit76] H.S. Witsenhausen. The zero-error side information problem and chromatic numbers. *IEEE Trans. Information Theory*, IT-22(5):592–593, 1976.

6 Knappe koppelingen

Dion Gijswijt

6.1 Inleiding

Zes studenten, Ada, Bas, Carl, Diana, Eef en Ferry willen graag hun wiskundeproject over netwerken doen. Gelukkig zijn er ook zes projecten om uit te kiezen: (1) Complexe netwerken, (2) Telecommunicatie netwerken, (3) Robuuste netwerken, (4) Bayesiaanse netwerken, (5) Shannon capaciteit en (6) Koppelingen.

Elke student heeft voorkeur voor bepaalde projecten. Hieronder zie je wie welk project wil doen.

Student	Project				
Ada	2	3			
Bas	1	2	4	5	
Carl	2	6			
Diana	2	6			
Eef	3	4	5		
Ferry	3	6			

De vraag is nu of de studenten verschillende projecten toegewezen kunnen krijgen, rekening houdend met hun voorkeuren. Als eerste poging lopen we de studenten alfabetisch af en wijzen het eerste project toe dat nog beschikbaar is. Ada krijgt dan project 2, Bas project 1. Carl krijgt project 6, want project 2 is al bezet. Aangekomen bij Diana blijkt dat al haar opties al bezet zijn, helaas. Eef krijgt project 3 en voor Ferry is er ook geen project meer over, helaas.

We hebben nu vier van de zes studenten gelukkig gemaakt, maar het kan beter! We geven Diana project 2. Ada geven we dan project 3 in plaats van 2 en Eef geven we project 4 in plaats van 3. Nu blijft alleen Ferry nog over zonder project.

Opgave 6.1.1. *Puzzel uit hoe we alle zes studenten een project van hun keuze kunnen geven (als dat kan).*

Misschien is het niet gelukt om bovenstaande opgave op te lossen, en daar is een goede reden voor: er bestaat namelijk geen volledige toewijzing. Ada, Carl, Diana en Ferry zijn met z'n vieren maar geïnteresseerd in een drietal projecten (2, 3 en 6). Daarom kunnen deze vier studenten al niet aan vier projecten van hun keuze worden toegewezen, laat staan dat alle zes studenten gelukkig gemaakt kunnen worden.

Opgave 6.1.2. *Stel dat Carl ook project 1 wil doen. Ga na dat alle zes studenten dan een project van hun keuze kunnen krijgen.*

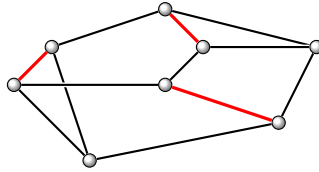
Nadat de projecten zijn afgerond krijgen we een verzoek van de feestcommissie. Voor het dansgala aan het eind van het jaar hebben 100 meisjes en 100 jongens zich opgegeven. Het blijkt dat elk meisje precies 10 van de jongens kent en elke jongen kent precies 10 van de meisjes. Is het mogelijk om 100 danskoppels te maken bestaande uit een jongen en een meisje die elkaar kennen? A priori zijn er 10^{100} combinaties na te gaan. Dat is zelfs voor een supercomputer teveel werk. Het is dus tijd om het probleem systematisch aan te pakken met behulp van netwerken!

6.2 Grafen en koppelingen

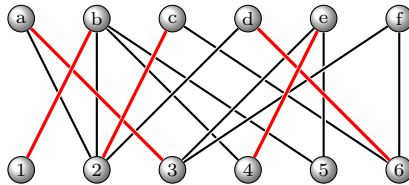
Een *graaf* bestaat uit een verzameling *knopen* en een verzameling *takken*. Een tak verbindt twee knopen van de graaf die de *eindpunten* van die tak heten. Als een tak twee knopen verbindt dan zijn die knopen *buren* van elkaar. Een voorbeeld van een graaf is de Facebook-graaf waarvan de knopen de mensen met een account zijn en twee mensen verbonden zijn door een tak als ze vrienden zijn. In dit geval zijn vrienden dus buren.

Grafen worden vaak grafisch voorgesteld door voor elke knoop een punt te tekenen en voor elke tak een lijnstuk (of kromme) tussen zijn twee eindpunten. Deze lijnstukken/krommen mogen elkaar gerust doorsnijden zolang maar duidelijk is welke tweetallen knopen door een tak zijn verbonden.

Een deelverzameling van de takken van een graaf heet een *koppeling* als geen twee takken uit die deelverzameling een gemeenschappelijk eindpunt hebben. In onderstaande figuur zie je een voorbeeld van een graaf met een koppeling aangegeven in rood.

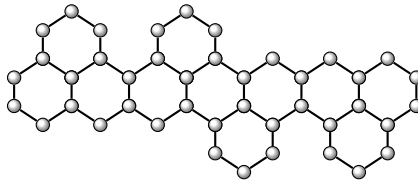


Bij het probleem uit de inleiding kunnen we een graaf maken door als knopen de studenten en de projecten te nemen. We verbinden een student en een project als de student dat project wil doen. De koppeling die we in de introductie hebben gevonden zie je hieronder.



De graaf die bij ons probleem hoort is van een speciaal type: de knopen kunnen in twee verzamelingen worden verdeeld, zeg A en B , zo dat elke tak een knoop uit A met een knoop uit B verbindt. Zo'n graaf wordt *bipartiet* genoemd. Anders gezegd: een graaf is bipartiet precies dan als de knopen met twee kleuren kunnen worden gekleurd zó dat de twee eindpunten van elke tak verschillende kleuren hebben. De verzamelingen A en B worden daarom ook wel de *kleurklassen* genoemd.

Opgave 6.2.1. *Ga na dat de volgende graaf bipartiet is. Vind een koppeling met zoveel mogelijk takken.*



Opgave 6.2.2.

- (a) *Ga na dat een bipartiete graaf nooit een cykel van oneven lengte kan hebben.*
- (b) *Bewijs dat een graaf zonder oneven cyclen altijd bipartiet is.*

6.3 Huwelijksstelling

Laat G een bipartiete graaf zijn met kleurklassen A en B . We willen weten of er een *complete koppeling* in G bestaat: een koppeling die alle punten in A koppelt aan punten in B .

Stel eerst eens dat we in het gunstige geval zitten en er zo'n complete koppeling bestaat. Misschien moeten we een paar uur puzzelen om zo'n koppeling K te vinden, maar dan hebben we ook een tastbaar resultaat: we kunnen een ander eenvoudig overtuigen van ons resultaat door simpelweg de oplossing te tonen. Dat K inderdaad een koppeling is die heel A koppelt is vrijwel in een oogopslag te controleren.

Stel nu eens dat er *geen* complete koppeling bestaat. Hoe kunnen we een ander (of onszelf!) daarvan overtuigen? Met andere woorden: bestaat er een certificaat dat in een oogopslag overtuigt van het niet bestaan van een complete koppeling?

Als er een knoop a in A is die helemaal geen buurknopen in B heeft, dan kan geen enkele koppeling a koppelen. Er is dan duidelijk geen complete koppeling. Meer algemeen geldt: Als er k knopen in A zijn die samen minder dan k buren in B hebben, dan is er geen complete koppeling. In de introductie zagen we precies dit argument met $k = 4$. Er waren vier studenten die aan drie projecten gekoppeld moesten worden, hetgeen onmogelijk is.

Verrassend genoeg blijkt het niet bestaan van een complete koppeling *altijd* gepaard te gaan met bovenstaande oorzaak. Het niet bestaan van een complete koppeling kan dus eenvoudig worden bewezen door een geschikt k -tal punten uit A aan te wijzen met te weinig gezamenlijke buren.

Voor een verzameling U van knopen noteren we de verzameling knopen die een buur in U hebben (maar zelf niet in U zitten) met $N(U)$. We kunnen bovenstaande dan samenvatten in de volgende beroemde stelling.

Stelling 6.3.1 (Huwelijksstelling van Hall). *Zij G een bipartiete graaf met kleurklassen A en B . Precies één van de volgende twee beweringen is waar*

- *Er is een koppeling die alle knopen in A koppelt.*
- *Er is een deelverzameling A' van A waarvoor geldt:
 $|N(A')| < |A'|$.*

De naam van deze stelling komt van de context waarbij A een verzameling dames voorstelt en B een verzameling heren. Voor elke dame is er een deelverzameling van heren die een acceptabele partner zouden zijn. De vraag is dan of alle dames kunnen worden uitgehuwelijkt aan een van de heren. De huwelijksvoorwaarde is dat iedere aantal dames gezamenlijk minstens zoveel heren acceptabel acht.

Deze stelling is bewezen door Philip Hall in 1935, maar een paar jaar eerder ook al bewezen door Denes Kőnig. Zelf stellen we het bewijs even uit tot een latere paragraaf.

6.4 Min-max

Als er geen complete koppeling van A bestaat, dan is daar altijd een duidelijke aanwijsbare oorzaak voor. Het blijkt dat we dat resultaat flink kunnen versterken. Als elke koppeling bijvoorbeeld minstens 10 knopen van A ongekoppeld laat, kunnen we ook daar een overtuigende oorzaak voor aanwijzen.

Opgave 6.4.1. *Laat G een bipartiete graaf zijn met kleurklassen A en B . Stel dat A' een deelverzameling van A is waarvoor geldt: $|N(A')| \leq |A'| - t$ voor een zeker natuurlijk getal t . Ga na dat in elke koppeling minstens t knopen van A ongekoppeld zijn.*

Dat het type argument uit de vorige opgave altijd kan worden gebruikt om optimaliteit van een koppeling te bewijzen kan eenvoudig uit de stelling van Hall worden afgeleid. Stel bijvoorbeeld dat iedere koppeling minstens 10 knopen van A ongekoppeld laat. Voeg nu aan B negen nieuwe knopen toe en verbind die met alle knopen in A (projecten die iedereen wel wil doen). De resulterende graaf heeft dan nog steeds geen volledige koppeling: minstens $10 - 9 = 1$ knopen van A blijven ongekoppeld. Wegens de stelling van Hall is er dus een deelverzameling A' van A met $|A'| > |N(A')|$. Omdat de negen nieuwe knopen in $N(A')$ zitten, geldt in de oorspronkelijke graaf dat $|A'| > |N(A')| + 9$, oftewel $|A'| \geq |N(A')| + 10$. De verzameling A' geeft zodoende een certificaat voor het feit dat elke koppeling minstens 10 knopen van A ongekoppeld laat.

We kunnen dit resultaat nog in een iets mooier jasje steken. Noem een verzameling C van knopen een *knoopoverdekking* als iedere tak minstens een eindpunt in C heeft. De verzameling C mag dus zowel punten van A als B bevatten, maar moet wel van elke tak minstens

één eindpunt hebben. We vinden dan de volgende prachtige min-max relatie.

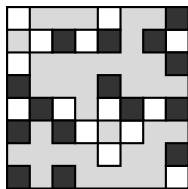
Stelling 6.4.1. (König) *Zij G een bipartiete graaf met kleurklassen A en B . Het maximum aantal takken in een koppeling is gelijk aan het minimum aantal knopen in een knoopoverdekking.*

Bewijs. Laat K een zo groot mogelijke koppeling zijn. Voor elke puntoverdekking C , dan moet gelden $|C| \geq |K|$, want C moet van elke tak uit K een eindpunt hebben en geen knoop is het eindpunt van meerdere takken in K .

Om het bewijs te voltooien moeten we alleen nog een puntoverdekking C vinden met $|C| \leq |K|$. Laat t het aantal knopen in A zijn die in K ongekoppeld blijven. We hebben eerder gezien dat er dan een deelverzameling A' van A bestaat met $|N(A')| \leq |A'| - t$. Voor C nemen we nu alle knopen in $N(A')$ samen met alle knopen uit A die niet in A' zitten, dus $C := N(A') \cup (A \setminus A')$. Nu is C inderdaad een knoopoverdekking: de takken vanuit $A \setminus A'$ hebben duidelijk een eindpunt in C en de takken vanuit A' hebben een eindpunt in $N(A')$ en dus in C . Ten slotte zien we dat $|C| = |A| - |A'| + |N(A')| \leq |A| - t = |K|$. \square

De stelling van König laat zien dat er altijd een kort bewijs bestaat voor optimaliteit van een koppeling. Als het maximum aantal takken in een koppeling bijvoorbeeld 10 is, dan kunnen we een koppeling met 10 takken geven als certificaat dat 10 inderdaad mogelijk is, en een puntoverdekking met 10 knopen als certificaat dat er geen grotere koppeling bestaat.

Opgave 6.4.2. *We willen torens plaatsen op een schaakbord. De torens mogen niet op de grijze vakjes staan en geen twee torens mogen in dezelfde rij of kolom staan. We willen weten wat het grootste aantal torens is dat we kunnen plaatsen. Vertaal dit in een koppelingsprobleem en pas de stelling van König toe.*



Opgave 6.4.3. *Zij G een bipartiete graaf waarin iedere knoop 4 buren heeft. De twee kleurklassen moeten dan evenveel knopen hebben,*

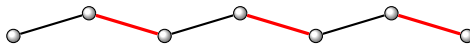
zeg n . Bewijs nu dat elke knoopoverdekking minstens n knopen bevat. Concludeer (met König) dat er een koppeling is die alle knopen koppelt.

Opgave 6.4.4. Laat zien dat het dansgala-probleem uit de inleiding een oplossing heeft: het is inderdaad mogelijk om 100 koppels te maken.

Opgave 6.4.5. Een stapel speelkaarten wordt geschud en verdeeld over 13 stapeltjes van 4 kaarten. Bewijs dat je uit elke stapel een kaart kunt nemen, zó dat je daarna dertien kaarten van verschillende waarde hebt: een aas, een koning, een vrouw etc.

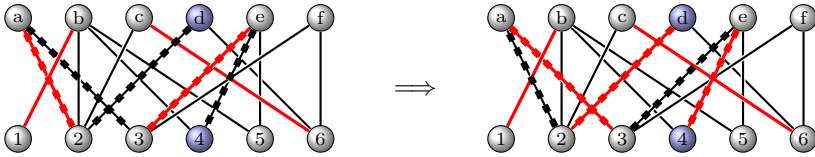
6.5 Een algoritme

Gegeven is een graaf met een koppeling K . Hoe kom je er achter of er een koppeling met meer takken bestaat? In de introductie zagen we een koppeling die niet optimaal was maar waar geen takken aan toegevoegd konden worden. Om een vijfde project toe te wijzen moesten we andere toewijzingen weer omgooien. In plaats van weer helemaal vanaf nul te beginnen blijkt er een slimme truc te zijn waarmee je de huidige koppeling kunt aanpassen tot een koppeling met meer takken (als die bestaat natuurlijk). We bekijken daarvoor paden in de graaf die afwisselend een lijn *in* de koppeling en een lijn *buiten* de koppeling doorlopen. Zo'n pad heet een K -*alternerend pad*. Hier zie je schematisch hoe zo'n pad eruit ziet.



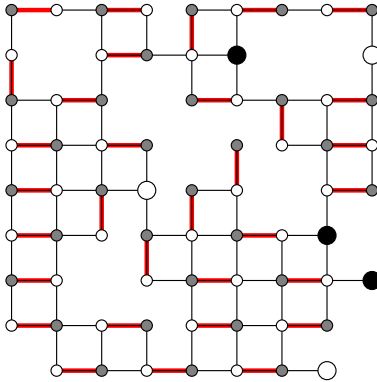
Als beide eindpunten van een K -alternerend pad P ongekoppeld zijn, dan heet het pad K -*verbeterend*. In dat geval kan de koppeling namelijk verbeterd worden met behulp van P . Dat gaat als volgt: de takken op het pad die in de koppeling zitten verwijderen we uit de koppeling. Vervolgens voegen we de andere lijnen van het pad juist aan de koppeling toe. Dit resulteert in een koppeling (ga na!), met één lijn meer. Naast de knopen die al gekoppeld waren zijn nu ook de eindpunten van het pad gekoppeld.

In de introductie bekeken we een koppeling van studenten aan projecten. We hadden eerst een oplossing met maar vier toewijzingen gevonden en daarna een met vijf toewijzingen. In de linker figuur hieronder zie je de koppeling met vier toewijzingen. Ook is een verbeterend pad tussen knopen 4 en d aangegeven. Als we de koppeling langs dit pad verbeteren vinden we (rechter figuur) precies de koppeling met vijf toewijzingen.



Het idee van verbeterende paden gaat terug op de Deense wiskundige Julius Petersen. Hij merkte op dat als er een grotere koppeling dan de huidige koppeling K bestaat, er ook altijd een K -verbeterend pad is. Voor het vinden van een koppeling met zoveel mogelijk takken volstaat het dus om te beginnen met een enkele tak en die koppeling stap voor stap te vergroten met verbeterende paden.

Opgave 6.5.1. *Vind een verbeterend pad voor de koppeling in de figuur. Zijn er meerdere mogelijkheden?*



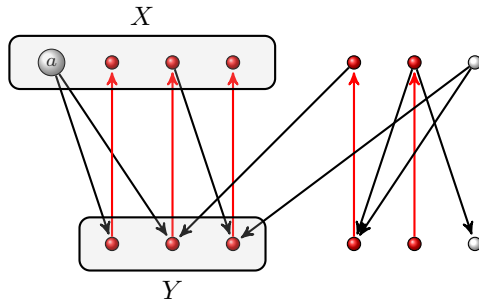
In een algemene graaf kan het lastig zijn om een verbeterend pad te vinden omdat je in een oneven cykel terecht kan komen. In bipartiete grafen gaat het echter heel eenvoudig door alle takken een richting te geven. De takken in de koppeling richten we van B naar A en de overige takken van A naar B . Elk K -verbeterend pad correspondeert dan precies met een gericht pad van een ongekoppelde knoop in A naar een ongekoppelde knoop in B . Zo'n pad (als het bestaat) kan eenvoudig gevonden worden met bijvoorbeeld breadth-first-search.

Bewijs van Hall

Met behulp van K -verbeterende paden zullen we nu een bewijs geven van de stelling van Hall.

Laat G een bipartiete graaf zijn met kleurklassen A en B . Laat K een koppeling met zoveel mogelijk takken zijn. We moeten bewijzen dat óf K alle punten in A koppelt, óf er een deelverzameling A' van A is met $|N(A')| < |A'|$. Het is duidelijk dat de twee beweringen niet tegelijk kunnen gelden. Het volstaat daarom om aan te nemen dat K niet alle knopen in A koppelt en vervolgens te bewijzen dat er een deelverzameling A' van A is met $|N(A')| < |A'|$.

Laat a een ongekoppeld punt in A zijn. Bekijk nu welke punten vanuit a te bereiken zijn met een K -alternerend pad. Laat X de verzameling bereikbare punten in A zijn en Y de bereikbare punten binnen B .



We merken nu de volgende zaken op:

- (i) Elke knoop y in Y moet gekoppeld zijn. Zo niet, dan zou er een K -verbeterend pad van a naar y zijn. Dit weerspreekt de aanname dat K een koppeling van maximale grootte is.
- (ii) Voor elke knoop y in Y ligt de ‘partner’ in de koppeling in de verzameling X . We kunnen immers het alternerende pad van a naar y verlengen tot de partner van y .
- (iii) Van elke knoop x in X liggen de buuren in Y . Voor knoop a is dit per definitie zo. Als x niet knoop a is, dan ligt x op een alternerend pad P van a naar x . De partner van x ligt dan ook op P en dus in Y . Voor elke niet-partner buur z van x kunnen we P verlengen tot z , dus moet z in Y liggen.

Uit (i) en (ii) volgt dat $|X| \geq |Y| + 1$. Uit (iii) volgt dat $N(X) = Y$. Met andere woorden, X is de verzameling A' waar we naar zochten.

Opgave 6.5.2. Laat K een koppeling zijn met een maximaal aantal takken. Laat W de verzameling ongekoppelde knopen in A zijn. Bekijk nu de verzameling Z van knopen die vanuit een knoop in W te bereiken zijn via een K -alternerend pad. Laat $C := (A \setminus Z) \cup (B \cap Z)$ bestaan uit

de knopen uit B die wel te bereiken zijn en de knopen uit A die juist niet te bereiken zijn.

Ga na dat C een knoopoverdekking is met $|C| = |K|$.

6.6 Toewijzingsproblemen

In de introductie zagen we een voorbeeld van een toewijzingsprobleem: studenten moesten worden toegewezen aan verschillende projecten. We hebben een criterium gezien voor het bestaan van een complete toewijzing (stelling van Hall), een min-max formule voor de maximum grootte van een toewijzing (stelling van König) en een algoritme om een grootste toewijzing te vinden (met behulp van verbeterende paden).

Met de term *toewijzingsprobleem* (engels: assignment problem) wordt meestal een algemener probleem bedoeld waarbij aan elke tak een getal is toegekend (een ‘gewicht’). Het doel is dan om een (volledige) koppeling te vinden waarvan de som van de gewichten op de takken zo klein mogelijk is. Deze gewichten kunnen bijvoorbeeld kosten voorstellen om een een bepaalde taak te koppelen aan een bepaalde machine of kunnen een maat zijn voor hoe graag een bepaalde student een bepaald project wil doen.

We bekijken weer een voorbeeld. In de vakantie wil een school de ICT op orde brengen. Dit behelst een vijftal programmeertaken. De school heeft vijf oud leerlingen die nu van beroep programmeur zijn (Ada, Babbage, Chomski, Erlang en Gödel). Elke programmeur moet een eigen taak toegewezen krijgen. In de onderstaande tabel staan de geraamde kosten voor het laten uitvoeren van een gegeven taak door een gegeven programmeur.

	1	2	3	4	5
Ada	24	31	12	21	14
Babbage	11	18	5	12	6
Chomski	41	38	13	42	20
Erlang	20	23	22	32	23
Gödel	26	41	12	27	19

De vraag is nu wat de meest goedkope toewijzing is van taken aan programmeurs.

We zullen hier het Hongaarse algoritme beschrijven om het toewijzings-

probleem op te lossen. Het Hongaarse algoritme is bedacht door Harold Kuhn en is gebaseerd op ideeën van de Hongaarse wiskundigen Dénes Kőnig en Jenő Egerváry, vandaar de naam.

We formuleren het algoritme in termen van vierkante matrices, zeg met n rijen en n kolommen. De rijen en kolommen corresponderen met de punten uit de twee kleurklassen A respectievelijk B en de getallen in de matrix geven de gewichten behorende bij de takken van de graaf. Op posities die niet met een tak corresponderen zetten we als getal $+\infty$ neer. Als er meer knopen in B dan in A zitten (of omgekeerd) dan kunnen we eventueel extra ‘dummy’ knopen toevoegen.

Merk op dat als we van alle getallen in een gegeven rij van de matrix hetzelfde getal aftrekken, de verzameling van optimale toewijzingen niet verandert. Dat komt omdat elke toewijzing precies één tak in de betreffende rij heeft. Hetzelfde geldt natuurlijk voor de kolommen.

Het algoritme gaat nu als volgt.

Hongaarse algoritme

Input: Een niet-negatieve $n \times n$ matrix W .

Output: Een toewijzing van minimaal gewicht.

0. Bepaal voor elke kolom van W het kleinste getal en trek dat van alle getallen in die kolom af. Doe daarna hetzelfde voor de rijen.
1. Bekijk de deelgraaf G' van G waarbij alleen de takken van gewicht nul meedoen.
2. Vind een koppeling K in G' met zoveel mogelijk lijnen en vind ook een knoopoverdekking C in G' met zo min mogelijk knopen. Er geldt dus $|K| = |C|$ (vanwege Kőnig) en in de vorige paragraaf is beschreven hoe we K en C kunnen vinden.
3. Als K heel A koppelt, dan is K een optimale toewijzing. STOP.
4. We gaan de matrix W aanpassen. Laat α het kleinste getal in de matrix zijn waarvan de rij en kolom niet tot C behoren. Merk op dat $\alpha > 0$, want anders zou C geen knoopoverdekking zijn van G' .
 - (a) Tel α op bij alle getallen uit de rijen die tot C behoren.
 - (b) Trek α af van alle getallen uit de kolommen die niet tot C

behoren.

5. Ga nu weer terug naar stap 2.

We illustreren het algoritme aan de hand van het voorbeeld. We beginnen met stap 0. Na verlagen per kolom en daarna per rij vinden we achtereenvolgens

	1	2	3	4	5
Ada	13	13	7	9	8
Babbage	0	0	0	0	0
Chomski	30	20	8	30	14
Erlang	9	5	17	20	17
Gödel	15	23	7	15	13

en

	1	2	3	4	5
Ada	6	6	0	2	<u>1</u>
Babbage	0	0	0	0	0
Chomski	22	12	0	22	6
Erlang	4	0	12	15	12
Gödel	8	16	0	8	6

Binnen de nullen heeft de grootst mogelijke koppeling drie takken (aangegeven in rood). Kolom 3 en rijen Babbage en Erlang vormen samen een minimale knoopoverdekking (aangegeven in grijs). Het kleinste getal dat niet in kolom 3, rij Babbage en rij Erlang zit is 1, dus $\alpha = 1$. Aanpassen van de rijen en kolommen als in stap 4 geeft de figuur links-onder.

Nu is er een koppeling met vier takken en kolommen 2 en 3 vormen met rijen Ada en Babbage een minimale knoopoverdekking. Het kleinste getal buiten deze vier rijen en kolommen is 4. Aanpassen van de matrix volgens stap 4 geeft de figuur rechtsonder.

	1	2	3	4	5
Ada	5	5	0	1	0
Babbage	0	0	1	0	0
Chomski	21	11	0	21	5
Erlang	<u>4</u>	0	13	15	12
Gödel	7	15	0	7	5

	1	2	3	4	5
Ada	5	9	4	1	0
Babbage	0	4	5	0	0
Chomski	17	11	0	17	<u>1</u>
Erlang	0	0	13	11	8
Gödel	3	15	0	3	1

Opnieuw heeft de grootste koppeling vier takken. Kolom 3 en rijen Ada, Babbage en Erlang vormen een knoopoverdekking. Het kleinste getal niet in die rijen en kolommen is 1. Stap 4 geeft nu de matrix links-onder.

Nog een iteratie van het algoritme levert de matrix rechtsonder op. Hierin is eindelijk een volledige toewijzing te vinden.

	1	2	3	4	5
Ada	5	9	5	1	0
Babbage	0	4	6	0	0
Chomski	16	10	0	16	0
Erlang	0	0	14	11	8
Gödel	2	14	0	2	0

	1	2	3	4	5
Ada	4	8	5	0	0
Babbage	0	4	7	0	0
Chomski	15	9	0	15	0
Erlang	0	0	15	11	9
Gödel	1	13	0	1	0

We hebben dus een optimale toewijzing gevonden. De kosten van de toewijzing bedragen $21 + 11 + 20 + 23 + 12 = 87$.

Ten slotte merken we nog op dat het algoritme ook een certificaat geeft voor de optimaliteit van de gevonden toewijzing. Gedurende het algoritme hebben we steeds van alle getallen in een rij of kolom hetzelfde getal afgetrokken. Als we dit per rij en kolom bijhouden dan krijgen we voor iedere rij een getal u_i en voor iedere kolom j een getal v_j . Deze getallen vormen het certificaat. Trekken we namelijk deze getallen van de betreffende rijen en kolommen af, dan vinden we een niet-negatieve matrix W' waarin de gevonden toewijzing alleen nullen gebruikt. Dit betekent dat de gevonden toewijzing voor de gewichten W' zeker optimaal is. Maar dan is de toewijzing ook optimaal voor de oorspronkelijke gewichten W , want optimaliteit bleef behouden onder de rij- en kolom-operaties.

Opgave 6.6.1. *Ga na dat het algoritme de volgende min-max relatie geeft. Het minimale gewicht van een toewijzing is gelijk aan de maximale waarde van $u_1 + \dots + u_n + v_1 + \dots + v_n$ waarbij de u_i en v_j getallen zijn die voldoen aan $u_i + v_j \leq W_{ij}$ voor elke rij i en kolom j .*

6.7 Gemengde opgaven

Opgave 6.7.1. *Een transversaal van een collectie verzamelingen A_1, \dots, A_n is een n -tal verschillende elementen x_1, \dots, x_n met $x_i \in A_i$ voor $i = 1, \dots, n$. Hebben de volgende collecties verzamelingen een transversaal?*

- $\{3, 4, 5\}, \{2, 5, 6\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 6\}$
- $\{a, b, c, d, e, f\}, \{a, c, d\}, \{a, d, g\}, \{b, c, e, f\}, \{c, d, g\},$
 $\{a, c, d, g\}, \{a, c, g\}$

Opgave 6.7.2. *Een geblinddoekte goochelaar heeft een glas met daarin een rode, groene, blauwe, gele en zwarte knikker. Zijn assistente laat een vrijwilliger twee knikkers uit het glas pakken. Daarna verwijdert*

de assistente zelf nog een knikker uit het glas. De goochelaar krijgt het glas met de twee overgebleven knikkers te zien en voorspelt correct welke twee knikkers de vrijwilliger heeft.

Hoe werkt deze truc en de generalisatie voor $2n + 1$ verschillende knikkers, waarbij de vrijwilliger er n pakt?



Opgave 6.7.3. Beschouw het volgende citaat¹:

Las u al de laatste van Hall over huwelijk en transversalen?

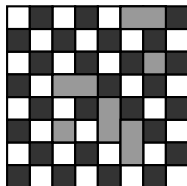
Nee, ik wacht tot ze het vertalen!

Is het mogelijk om uit elk van de 18 woorden een letter te kiezen, zó dat de gekozen letters verschillend zijn?

Opgave 6.7.4. Een $m \times n$ Latijnse rechthoek ($m \leq n$), is een $m \times n$ matrix waarvan de entries in $\{1, 2, \dots, n\}$ zitten en geen getal tweemaal voorkomt in dezelfde rij of in dezelfde kolom. Als $m = n$ dan spreken we van een Latijns vierkant.

Bewijs dat elke $m \times n$ Latijnse rechthoek uit te breiden is tot een $n \times n$ Latijns vierkant.

Opgave 6.7.5. In de figuur zie je een schaakbord. Tien vakjes zijn grijs gemaakt. Is het mogelijk om de resterende 54 vakjes te betegelen met domino's (elke domino bedekt precies twee vakjes)?



Opgave 6.7.6. Een taxibedrijf wil vijf passagiers oppikken (genummerd 1 tot en met 5) met vijf taxi's (genaamd A tot en met E). Voor elke taxi en passagier zijn er kosten verbonden aan het oppikken van die passagier met die taxi, zie de tabel. Verder kan taxi C passagier 3 niet oppikken en kan taxi D passagier 2 niet oppikken.

Bepaal een goedkoopste manier om de passagiers aan de taxi's toe te wijzen.

¹Het is mij helaas onbekend wie deze prachtige zin heeft bedacht.

	1	2	3	4	5
A	49	81	36	36	4
B	4	64	25	121	9
C	16	36		49	1
D	64		25	25	49
E	25	9	4	16	16

Opgave 6.7.7. Twee spelers spelen het volgende spel op een graaf G . Ombeurten markeren ze een knoop van de graaf die nog niet gemarkeerd is. De eerste speler begint met het markeren van een knoop naar keuze. Daarna moet in elke beurt een knoop gemarkeerd worden die een buur is van de knoop die in de beurt ervoor gemarkeerd is. De winnaar is degene die als laatst een zet kan doen.

Bewijs dat de eerste speler een winnende strategie heeft precies dan als G geen koppeling heeft die alle punten koppelt.



Voor wie is PWN interessant?

Beroepswiskundigen

Wiskundeleraren

Bedrijven

Leerlingen en studenten

Breed publiek

Platform Wiskunde Nederland is hét landelijke loket voor alles wat met wiskunde te maken heeft.

PWN behartigt de belangen van, en fungeert als spreekbuis voor, de gehele Nederlandse wiskunde.

Platform Wiskunde Nederland | Science Park 123 | kamer L013 | 1098 XG Amsterdam | 020 592 40 06

Ga voor meer informatie naar:
www.platformwiskunde.nl

